เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป

ดวงกมล กิจควร

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

2558

เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป

ดวงกมล กิจควร

วท.ม. (คณิตศาสตร์)

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

2558

คำนำ

เอกสารประกอบการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป รหัสวิชา 0003203 เล่มนี้เขียนขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป ซึ่งได้แบ่งเนื้อหาในการเรียนการสอนไว้จำนวน 4 บท ได้แก่ จำนวนจริง ฟังก์ชันเลขยกกำลัง ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้นและตรีโกณมิติเบื้องต้น ซึ่งเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงและนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันและศาสตร์สาขาต่างๆ ได้

ผู้สอนขอขอบคุณเจ้าของเอกสารตำราทุกท่าน ที่ผู้สอนได้ใช้ศึกษาค้นคว้าและอ้างอิงในการเขียนครั้งนี้ และขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณีที่สนับสนุนส่งเสริมให้คณาจารย์ทำผลงานทางวิชาการ ผู้สอนหวังว่าเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้คงเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน ผู้สอน และผู้สนใจที่จะศึกษาไม่มากก็น้อย

ดวงกมล กิจควร

28 กรกฎาคม 2558

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ(ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

แผนบริหารการสอนประจำวิชา

รหัสวิชา 0003203

รายวิชา คณิตศาสตร์ทั่วไป 3(3-0-6)

General Mathematics

คำอธิบายรายวิชา

คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับ จำนวนจริง ฟังก์ชันเลขยกกำลัง ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น ฟังก์ชันตรีโกณมิติเบื้องต้น และการประยุกต์ในคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน

The mathematics on real number, exponential function, logarithm function, introduction to trigonometric function and application in daily life.

ความมุ่งหมายรายวิชา

1. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระบบจำนวนจริง
2. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันเลขยกกำลัง
3. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น
4. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับตรีโกณมิติเบื้องต้น
5. เพื่อให้ผู้เรียนนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันและศาสตร์สาขาอื่นๆ

เนื้อหา

บทที่ 1 จำนวนจริง 12 ชั่วโมง

1.1 ระบบจำนวนจริง

1.2 สมบัติของจำนวนจริง

1.3 การแก้สมการตัวแปรเดียว

1.4 ค่าสัมบูรณ์

1.5 การประยุกต์

1.6 สรุป

บทที่ 2 ฟังก์ชันเลขยกกำลัง 12 ชั่วโมง

2.1 เลขยกกำลัง

2.2 รากของจำนวนจริง

2.3 การหารากที่สองของจำนวนอตรรกยะบวก

2.4 การแก้สมการที่อยู่ในรูปกรณฑ์

2.5 ฟังก์ชันเลขยกกำลัง

2.6 การแก้สมการและอสมการของฟังก์ชันเลขยกกำลัง

2.7 การประยุกต์

2.8 สรุป

บทที่ 3 ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น 9 ชั่วโมง

3.1 ฟังก์ชันลอการิทึม

3.2 สมบัติของลอการิทึม

3.3 กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

3.4 ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ

3.5 การแก้สมการลอการิทึม

3.6 การประยุกต์

3.7 สรุป

บทที่ 4 ตรีโกณมิติเบื้องต้น 12 ชั่วโมง

4.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

4.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4.3 การประยุกต์

4.4 สรุป

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ฟังบรรยาย ประกอบไฟล์พาวเวอร์พอยนต์
2. อธิบายตัวอย่าง และฝึกปฏิบัติจากตัวอย่างที่กำหนดให้
3. ศึกษาจากเอกสารประกอบการสอน
4. แบ่งกลุ่มอภิปรายตามเนื้อหาที่กำหนดให้ และสรุปร่วมกัน
5. นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำแบบฝึกหัด
6. นักศึกษาศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองจากหนังสือหรือตำราในห้องสมุดด้วยตนเอง
7. นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบท
8. ทำแบบทดสอบที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป
2. หนังสือค้นคว้าเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้อง
3. ใบกิจกรรม
4. ไฟล์พาวเวอร์พอยนต์

การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล

คะแนนรวมในการประเมินผล	100	คะแนน
1. คะแนนระหว่างภาคเรียน	60	คะแนน
1.1 ความสนใจและเวลาเรียน	10	คะแนน
1.2 แบบฝึกหัดและใบกิจกรรม	20	คะแนน
1.3 ทดสอบระหว่างภาคเรียน	30	คะแนน
2. คะแนนสอบปลายภาคเรียน	40	คะแนน

การประเมินผล

ช่วงคะแนน	80 – 100	ได้ระดับ	A
ช่วงคะแนน	75 – 79	ได้ระดับ	B+
ช่วงคะแนน	70 – 74	ได้ระดับ	B
ช่วงคะแนน	65 – 69	ได้ระดับ	C+
ช่วงคะแนน	60 – 64	ได้ระดับ	C
ช่วงคะแนน	55 – 59	ได้ระดับ	D+
ช่วงคะแนน	50 – 54	ได้ระดับ	D
ช่วงคะแนน	0 – 49	ได้ระดับ	F

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

เนื้อหาประจำบท

บทที่ 1 จำนวนจริง

1.1 ระบบจำนวนจริง

1.2 สมบัติจำนวนจริง

1.3 การแก้สมการตัวแปรเดียว

1.4 ค่าสัมบูรณ์

1.5 การประยุกต์

1.6 สรุป

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อศึกษาบทที่ 1 แล้วนักศึกษาสามารถ

1. อธิบายจำนวนประเภทต่างๆ ได้
2. บอกสมบัติการเท่ากันของจำนวนจริงได้
3. บอกสมบัติการบวกจำนวนจริงและสมบัติการคูณจำนวนจริงได้
4. บอกสมบัติ ทฤษฎีบทการลบจำนวนจริงและทฤษฎีบทการหาร จำนวนจริงได้
5. แยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวได้
6. แยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังมากกว่าสองได้
7. บอกทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบท ตัวประกอบตรรกยะได้
8. แยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบท ตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะได้
9. แก้สมการเลขชี้กำลังสองโดยการแยกตัวประกอบหรือการใช้สูตรได้
10. แก้สมการเลขชี้กำลังมากกว่าสองได้
11. บอกสมบัติการไม่เท่ากันได้
12. แก้อสมการเลขชี้กำลังหนึ่งได้

13. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการเลขชี้กำลังหนึ่งได้
14. แก้อสมการเลขชี้กำลังมากกว่าหนึ่งได้
15. บอกสมบัติของค่าสัมบูรณ์ได้
16. แก้สมการในรูปค่าสัมบูรณ์ได้
17. แก้อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ได้

กิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนอธิบายเนื้อหาแต่ละเรื่องและซักถามความเข้าใจพร้อม ยกตัวอย่างประกอบการบรรยายโดยใช้ไฟล์เอกสารพาวเวอร์พอยนต์
2. ผู้เรียนศึกษาเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป เรื่อง จำนวนจริง
3. ผู้เรียนและผู้สอนร่วมกันอภิปรายและหาข้อสรุป
4. ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดบทที่ 1
5. ทดสอบย่อยหลังจบบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป
2. ใบงาน เรื่อง จำนวนจริง
3. ไฟล์เอกสารพาวเวอร์พอยนต์ เรื่อง จำนวนจริง
4. หนังสืออ่านประกอบค้นคว้าเพิ่มเติม
5. แบบฝึกหัดบทที่ 1

การวัดผลและประเมินผล

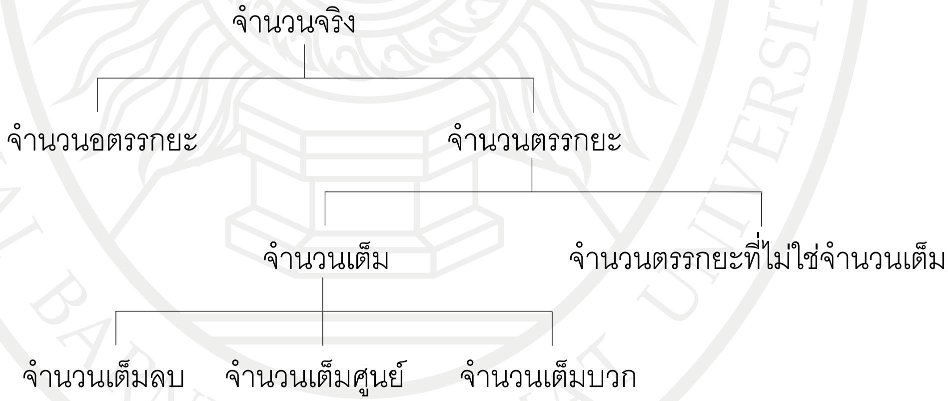
1. สังเกตจากการซักถามผู้เรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายกลุ่มย่อยและอภิปรายสรุป
3. ประเมินจากการทำแบบฝึกหัด
4. ประเมินจากการสอบระหว่างภาคและปลายภาค

บทที่ 1
จำนวนจริง

ตัวเลข หรือ จำนวน มีความจำเป็นในชีวิตประจำวันไม่ว่าจะเป็นด้านการเรียน การงาน หรือกระทั่งการดำเนินชีวิตส่วนใหญ่แล้วเกี่ยวข้องกับตัวเลข หรือ จำนวน และมีการพัฒนาจำนวนมาเรื่อยๆ จนได้จำนวนจริง สมบัติของจำนวนจริง การดำเนินการบนจำนวนจริง เป็นต้น

1.1 ระบบจำนวนจริง

จำนวนมีความเกี่ยวข้องกับมนุษย์ตั้งแต่สมัยโบราณ โดยจำนวนชนิดแรกที่มนุษย์ใช้ คือ จำนวนนับ(Natural number) หรือจำนวนเต็มบวก(Positive integer) การนับจำนวนของมนุษย์ในสมัยโบราณเป็นการจับคู่ระหว่างสัตว์กับก้อนหิน หรือรอยบากบนต้นไม้ เป็นต้น เมื่อเวลาผ่านไป มนุษย์จึงมีพัฒนาการเกี่ยวกับจำนวนเพิ่มมากขึ้น ทำให้เกิดจำนวนประเภทต่างๆ เพิ่มมากขึ้น จำนวนเหล่านั้นรวมเรียกว่า จำนวนจริง(Real number) จำนวนจริงแบ่งเป็นชนิดต่างๆ ดังนี้ (เลิศ สิทธิโกศล, 2540)



ภาพที่ 1.1 แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่างๆ

จากภาพข้างต้น จะเห็นได้ว่า เซตของจำนวนจริงจะประกอบด้วยเซตของจำนวนตรรกยะ (Rational number) และเซตของจำนวนอตรรกยะ(Irrational number)และเซตของจำนวนตรรกยะก็ประกอบด้วยเซตย่อย คือ เซตของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม และเซตของจำนวนเต็ม และเซตของจำนวนเต็มประกอบด้วยเซตย่อยคือ เซตของจำนวนเต็มลบ เซตของจำนวนเต็มศูนย์ และเซตของจำนวนเต็มบวก ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1.1.1 ระบบจำนวนจริง

จากภาพแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนข้างต้น จะพบว่าจำนวนจริงจะประกอบไปด้วย

1. จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เขียน $\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

   ดังนั้น $\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a,b \in \mathrm{I} \text{ และ } b \neq 0 \right\}$

2. จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เขียน $\mathbb{Q}'$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

   ดังนั้น $\mathbb{Q}' = \left\{ x \middle| x \neq \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a,b \in \mathrm{I} \text{ และ } b \neq 0 \right\}$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงจำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่างที่ 1 จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนประเภทใด

1) $\frac{2}{3}$
2) -8
3) $0.2\dot{5}$
4) 0.1234
5) $\sqrt{25}$
6) $\sqrt{2}$
7) $43.182635092...$
8) π

วิธีทำ

1) $\frac{2}{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
2) $-8 = \frac{-8}{1}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
3) $0.2\dot{5} = \frac{23}{90}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

4) $0.1234 = \dfrac{1234}{10000}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

5) $\sqrt{25} = \dfrac{5}{1}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

6) $\sqrt{2}$ ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูป $\dfrac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ ดังนั้นเป็นจำนวนอตรรกยะ

7) 43.182635092... ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูป $\dfrac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ ดังนั้นเป็นจำนวนอตรรกยะ

8) π ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูป $\dfrac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ ดังนั้นเป็นจำนวนอตรรกยะ

1.1.2 ระบบจำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะ สามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยมซ้ำได้ แต่ไม่เป็นจำนวนเต็ม
2. จำนวนเต็ม หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต

$$\mathrm{I} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

เมื่อกำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 2 จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็มหรือจำนวนเต็ม

1) $\dfrac{4}{5}$

2) $-\dfrac{9}{11}$

3) $4.\dot{9}8\dot{6}$

4) 59

5) $\sqrt{100}$

6) 0

วิธีทำ

1)	$\frac{4}{5}$	เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม
2)	$-\frac{9}{11}$	เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม
3)	$4.\dot{9}8\dot{6}$	เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม
4)	59	เป็นจำนวนเต็ม
5)	$\sqrt{100}$	เป็นจำนวนเต็ม
6)	0	เป็นจำนวนเต็ม

1.1.3 ระบบจำนวนเต็ม

จำนวนเต็มยังสามารถแบ่งออกได้อีกเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. จำนวนเต็มบวก หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต I^+ โดยที่ $I^+ = \{1,2,3,4,...\}$ เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มบวก เรียกได้อีกอย่างว่า จำนวนนับ ซึ่งเขียนแทนเซตของจำนวนนับได้ด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{N}$
2. จำนวนเต็มลบ หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต I^- โดยที่ $I^- = \{...,-4,-3,-2,-1\}$ เมื่อ I^- เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ
3. จำนวนเต็มศูนย์ หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต I^0 โดยที่ $I^0 = \{0\}$ เมื่อ I^0 เป็นเซตของจำนวนเต็มศูนย์

ตัวอย่างที่ 3 จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนเต็มประเภทใด

1) 41

2) $\sqrt{9}+\sqrt{4}$

3) $8-8$

4) $5-|-5|$

5) -75

6) $-4-7$

วิธีทำ

1) 41 เป็นจำนวนเต็มบวก

2) $\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$ เป็นจำนวนเต็มบวก

3) $8-8=0$ เป็นจำนวนเต็มศูนย์

4) $5-|-5|=5-5=0$ เป็นจำนวนเต็มศูนย์

5) -75 เป็นจำนวนเต็มลบ

6) $-4-7=-11$ เป็นจำนวนเต็มลบ

1.2 สมบัติของจำนวนจริง

ในเรื่องของสมบัติของจำนวนจริง มีทั้งสมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง สมบัติการบวกในระบบจำนวนจริง และสมบัติการคูณในระบบจำนวนจริง ดังหัวข้อต่อไปนี้

1.2.1 สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติการสะท้อน

$a=a$

2. สมบัติการสมมาตร

ถ้า $a=b$ แล้ว $b=a$

3. สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a=b$ และ $b=c$ แล้ว $a=c$

4. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a=b$ แล้ว $a+c=b+c$

5. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a=b$ แล้ว $ac=bc$

1.2.2 สมบัติของการบวกในระบบจำนวนจริง

กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติปิดของการบวก

   $a+b$ เป็นจำนวนจริง

2. สมบัติการสลับที่ของการบวก

   $a+b=b+a$

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

   มีจำนวนจริง 0 ที่ทำให้ $0+a=a=a+0$

4. สมบัติการมีตัวผกผันการบวก

   มีจำนวนจริง $-a$ ที่ทำให้ $a+(-a)=0=(-a)+a$

5. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

   $a+(b+c)=(a+b)+c$

1.2.3 สมบัติของการคูณในระบบจำนวนจริง

กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติปิดของการคูณ

   ab เป็นจำนวนจริง

2. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

   $ab=ba$

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

   มีจำนวนจริง 1 ที่ทำให้ $1\cdot a=a=a\cdot 1$

4. สมบัติการมีตัวผกผันการคูณ

   มีจำนวนจริง a^{-1} ที่ทำให้ $a\cdot a^{-1}=1=a^{-1}\cdot a$ เมื่อ $a\neq 0$

5. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ

   $a(bc)=(ab)c$

6. สมบัติการแจกแจง

   $a(b+c)=ab+ac$ หรือ $(a+b)c=ac+bc$

หมายเหตุ เครื่องหมาย $\cdot$ หมายถึง คูณ เช่น $1\cdot a$ หมายถึง 1 คูณกับ a

ตัวอย่างที่ 4 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

1) จำนวนเต็มบวกมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
2) จำนวนเต็มลบมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
3) จำนวนเต็มมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
4) จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
5) จำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดการคูณ
6) 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกจำนวนจริง
7) ถ้า b เป็นตัวผกผันการคูณของ a แล้ว $ab=1$
8) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนเต็มคี่
9) ตัวผกผันการคูณของ $\sqrt{8}-\sqrt{3}$ คือ $\sqrt{8}+\sqrt{3}$
10) $\{-1,0,1\}$ มีสมบัติปิดการคูณ

วิธีทำ

1) จำนวนเต็มบวกมีสมบัติปิดสำหรับการบวก	เป็นจริง
2) จำนวนเต็มลบมีสมบัติปิดสำหรับการบวก	เป็นจริง
3) จำนวนเต็มมีสมบัติปิดสำหรับการบวก	เป็นจริง
4) จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการบวก	เป็นจริง
5) จำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดการคูณ	เป็นเท็จ
6) 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกจำนวนจริง	เป็นจริง
7) ถ้า b เป็นตัวผกผันการคูณของ a แล้ว $ab=1$	เป็นจริง
8) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่	เป็นเท็จ
9) ตัวผกผันการคูณของ $\sqrt{8}-\sqrt{3}$ คือ $\sqrt{8}+\sqrt{3}$	เป็นเท็จ
10) $\{-1,0,1\}$ มีสมบัติปิดการคูณ	เป็นจริง

จากสมบัติของระบบจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณที่กล่าวมาข้างต้น เพียงพอจะได้มาซึ่งทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 กฎการตัดออกสำหรับการบวก (สุขใส ไพบูลย์, 2547:102)

เมื่อ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $a+c=b+c$ แล้ว $a=b$ (กฎการตัดออกทางขวา)
2. ถ้า $a+b=a+c$ แล้ว $b=c$ (กฎการตัดออกทางซ้าย)

ทฤษฎีบท 2 กฎการตัดออกสำหรับการคูณ

เมื่อ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$ (กฎการตัดออกทางขวา)
2. ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b = c$ (กฎการตัดออกทางซ้าย)

ทฤษฎีบท 3 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

$a \cdot 0 = 0$ และ $0 \cdot a = 0$

ทฤษฎีบท 4 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

$(-1)a = -a$ และ $a(-1) = -a$

ทฤษฎีบท 5 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

ทฤษฎีบท 6 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ (สุขใส ไพบูลย์, 2547:105)

1. $a(-b) = -ab$
2. $(-a)b = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$

1.2.4 การลบในระบบจำนวนจริง

นอกจากจะมีการบวกในระบบจำนวนจริงแล้ว ยังมีการลบในระบบจำนวนจริง ซึ่งต้องอาศัยสมบัติของการบวกในระบบจำนวนจริง ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ $a - b = a + (-b)$

นั่นคือ $a - b$ คือผลบวกของ a กับตัวผกผันการบวกของ b

จากนิยามการลบ สมบัติของจำนวนจริง และทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วสามารถนำมาสร้างทฤษฎีบทต่อไปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 7 กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $a-(-b)=a+b$
2. $(-a)+(-b)=-(a+b)$
3. $b-a=-(a-b)$
4. $a(b-c)=ab-ac$
5. $(a-b)c=ac-bc$
6. $(-a)(b-c)=-ab+ac$

1.2.5 การหารในระบบจำนวนจริง

นอกจากจะมีการคูณในระบบจำนวนจริงแล้ว ยังมีการหารในระบบจำนวนจริง ซึ่งต้องอาศัยสมบัติของการคูณในระบบจำนวนจริง ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $b\neq 0$ จะได้ว่า $\frac{a}{b}=ab^{-1}$

นั่นคือ $\frac{a}{b}$ คือผลคูณของ a กับตัวผกผันการคูณของ b

จากนิยามการหาร สมบัติของจำนวนจริง และทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วสามารถนำมาสร้างทฤษฎีบทต่อไปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 8 ถ้า $a\neq 0$ แล้ว $a^{-1}\neq 0$

ทฤษฎีบท 9 กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ (สุขใส ไพบูลย์,2547:109−111)

1. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{a}{bc}$ เมื่อ $b,c\neq 0$
2. $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ เมื่อ $b,c\neq 0$
3. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ เมื่อ $c\neq 0$
4. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ เมื่อ $b,d\neq 0$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{ac}{bd}$ เมื่อ $b,d\neq 0$

6. $\left(\dfrac{b}{c}\right)^{-1}=\dfrac{c}{b}$ เมื่อ $b,c\neq 0$

7. $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}=\dfrac{ac}{b}$ เมื่อ $b,c\neq 0$

8. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)}=\dfrac{ad}{bc}$ เมื่อ $b,c,d\neq 0$

9. $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b\neq 0$

10. $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$ เมื่อ $b\neq 0$

1.3 การแก้สมการตัวแปรเดียว

คำศัพท์ในการแก้สมการตัวแปรเดียวที่ควรทราบ เพื่อใช้ในการแก้สมการมีดังนี้

1. ตัวแปร คือ สัญลักษณ์ที่ไม่ใช่ตัวเลข นิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก เช่น $x, y, z, \ldots$ เป็นต้น
2. ค่าคงตัว คือ ตัวเลขที่ใช้แทนจำนวน เช่น $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ เป็นต้น
3. พจน์ คือ ข้อความที่เขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ต่างๆ แต่ในทางพีชคณิต จะมีการใช้ตัวอักษร เช่น $3x$, $5xy$, $\dfrac{x}{3}$ เป็นต้น
4. เอกนาม คือ พจน์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป โดยที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น $-3x$, $4xy$, $5x^2, \ldots$ เป็นต้น

   เอกนาม ประกอบด้วย 2 ส่วน คือส่วนที่เป็นค่าคงตัวและส่วนที่อยู่ในรูปการคูณกันของตัวแปร โดยส่วนที่เป็นค่าคงตัวเรียกว่า สัมประสิทธิ์ของเอกนาม และผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวในเอกนามจะเรียกว่า เลขชี้กำลังของเอกนาม

5. เอกนามคล้าย คือ เอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไปซึ่งมีตัวแปรชุดเดียวกัน และเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวมีค่าเท่ากัน เช่น
   1) $3x$ คล้ายกับ $5x$
   2) $-5x^2y$ คล้ายกับ $8x^2y$
   3) $2y$ คล้ายกับ $-2y$
6. พหุนาม คือ พจน์ตั้งแต่สองพจน์ขึ้นไปที่สามารถเขียนในรูปของเอกนาม หรือการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป เช่น
   1) $5x^3+15x^2+10x+5$
   2) x^2+2x+1
   3) $5x^2+y$

ตัวอย่างที่ 5 จงบอกเลขชี้กำลังของเอกนามต่อไปนี้

1) $5x$
2) $-3xy$
3) x^2y^4

วิธีทำ

1) $5x$	เอกนามเลขชี้กำลังหนึ่ง
2) $-3xy$	เอกนามเลขชี้กำลังสอง
3) x^2y^4	เอกนามเลขชี้กำลังหก

สำหรับพหุนามใดๆ เลขชี้กำลังสูงสุดของเอกนามในพหุนามจะเป็น เลขชี้กำลังสูงสุดของพหุนาม

ตัวอย่างที่ 6 จงบอกเลขชี้กำลังของพหุนามต่อไปนี้

1) x^3-2x
2) x^4+x^2-1
3) $x^4+x^2y^3-y^3$

วิธีทำ

1) x^3-2x	พหุนามเลขชี้กำลังสาม
2) x^4+x^2-1	พหุนามเลขชี้กำลังสี่
3) $x^4+x^2y^3-y^3$	พหุนามเลขชี้กำลังห้า

1.3.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว

การแยกตัวประกอบของพหุนามเป็นพื้นฐานของการนำไปใช้ในการแก้สมการ การแก้อสมการและในเรื่องอื่นๆ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นในการแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งการเขียนพหุนามให้อยู่ในรูปผลคูณของพหุนามที่มีเลขชี้กำลังต่ำกว่าพหุนามที่กำหนดให้ เรียกว่า การแยกตัวประกอบของพหุนาม

บทนิยาม 3 พหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว หมายถึง พหุนามที่เขียนในรูป ax^2+bx+c เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว ที่ $a\neq 0$ และ x เป็นตัวแปร

การแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว คือ การเขียนพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวในรูปผลคูณของพหุนามที่มีเลขชี้กำลังต่ำกว่าตั้งแต่สองพหุนามขึ้นไป การแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว สามารถทำได้โดยวิธีต่างๆ ดังนี้

1. การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยให้สมบัติการแจกแจงหรือการดึงตัวร่วม

สำหรับพหุนามที่อยู่ในรูปของ ax^2+bx+c เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว ที่ $a\neq 0$ แต่ $c=0$ สามารถใช้สมบัติการแจกแจงหรือการดึงตัวร่วมมาช่วยในการแยกตัวประกอบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

1) $6x^2-x$
2) $8x^2+2x$
3) $4x^2-8x$

วิธีทำ

1) $6x^2-x=6x\cdot x-x=x(6x-1)$
2) $8x^2+2x=2x\cdot 4x+2x=2x(4x+1)$
3) $4x^2-8x=4x\cdot x-4x\cdot 2=4x(x-2)$

การแยกตัวประกอบโดยวิธีนี้ สามารถประยุกต์ใช้กับพหุนามที่มีเลขชี้กำลังมากกว่าสองได้ โดยใช้หลักการเดียวกับพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

1) $x^3 - 3x^2$
2) $4x^6 - 16x$
3) $x^7 + 2x^3 - 4x$

วิธีทำ

1) $x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$
2) $4x^6 - 16x = 4x(x^5 - 4)$
3) $x^7 + 2x^3 - 4x = x(x^6 + 2x^2 - 4)$

2. การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$ และ $b \neq 0$

และ $c \neq 0$ ในกรณีนี้พหุนามดังกล่าวจะอยู่ในรูป $x^2 + bx + c$ สามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้ดังนี้ หาจำนวนจริงสองจำนวน สมมติให้เป็น m และ n โดยที่ $m \cdot n = c$ และ $m + n = b$ ดังนั้น $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 7x + 10$

วิธีทำ จาก $x^2 + 7x + 10$

มีจำนวนจริง 2 และ 5

ที่ทำให้ $2 \times 5 = 10$ และ $2 + 5 = 7$

ดังนั้น $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

ตัวอย่างที่ 10 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 3x - 10$

วิธีทำ จาก $x^2 - 3x - 10$

มีจำนวนจริง 2 และ -5

ที่ทำให้ $2 \times (-5) = -10$ และ $2 + (-5) = -3$

ดังนั้น $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$

ตัวอย่างที่ 11 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 5x + 6$

วิธีทำ จาก $x^2 - 5x + 6$

มีจำนวนจริง -2 และ -3

ที่ทำให้ $(-2)\times(-3)=6$ และ $(-2)+(-3)=-5$

ดังนั้น $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

ตัวอย่างที่ 12 จงแยกตัวประกอบของ x^2+x-42

วิธีทำ จาก x^2+x-42

มีจำนวนจริง -6 และ 7

ที่ทำให้ $(-6)\times 7=-42$ และ $(-6)+7=1$

ดังนั้น $x^2+x-42=(x-6)(x+7)$

3. การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูป ax^2+bx+c เมื่อ $a\neq 1, b\neq 0$

และ $c\neq 0$ ในกรณีนี้พหุนามดังกล่าวจะอยู่ในรูป ax^2+bx+c สามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้ดังนี้ หาจำนวนจริงสองจำนวน สมมติให้เป็น p และ q โดยที่ $p\cdot q=a$ และหาจำนวนจริงสองจำนวน สมมติให้เป็น m และ n ซึ่ง $m\cdot n=c$ ที่ทำให้ $qm+pn=b$ ดังนั้น $ax^2+bx+c=(px+m)(qx+n)$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 13 จงแยกตัวประกอบของ $25x^2+15x+2$

วิธีทำ จาก $25x^2+15x+2$

มีจำนวนจริง 5 และ 5 ที่ทำให้ $5\times 5=25$

และมีจำนวนจริง 1 และ 2 ที่ทำให้ $1\times 2=2$

โดยที่ $(5\times 1)+(5\times 2)=5+10=15$

ดังนั้น $25x^2+15x+2=(5x+1)(5x+2)$

ตัวอย่างที่ 14 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2+5x-9$

วิธีทำ จาก $4x^2+5x-9$

มีจำนวนจริง 4 และ 1 ที่ทำให้ $4\times 1=4$

และมีจำนวนจริง 9 และ -1 ที่ทำให้ $9\times(-1)=-9$

โดยที่ $(1\times 9)+(4\times(-1))=9+(-4)=5$

ดังนั้น $4x^2+5x-9=(4x+9)(x-1)$

ตัวอย่างที่ 15 จงแยกตัวประกอบของ $8x^2-10x-3$

วิธีทำ จาก $8x^2-10x-3$

มีจำนวนจริง 2 และ 4 ที่ทำให้ $2\times4=8$

และมีจำนวนจริง -3 และ 1 ที่ทำให้ $(-3)\times1=-3$

โดยที่ $(4\times(-3))+(2\times1)=(-12)+2=-10$

ดังนั้น $8x^2-10x-3=(2x-3)(4x+1)$

4. การแยกตัวประกอบของพหุนามในรูปผลต่างกำลังสอง

พหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวที่สามารถเขียนได้ในรูป x^2-a^2 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก เรียกว่า ผลต่างกำลังสอง จาก x^2-a^2 สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้ $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 16 จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

1) x^2-36

2) $4x^2-9^2$

3) $25x^2-49$

วิธีทำ

1) จาก x^2-36

จะได้ $x^2-36=x^2-6^2=(x-6)(x+6)$

ดังนั้น $x^2-36=(x-6)(x+6)$

2) จาก $4x^2-9^2$

จะได้ $4x^2-9^2=(2x-3)(2x+3)$

ดังนั้น $4x^2-9^2=(2x-3)(2x+3)$

3) จาก $25x^2-49$

จะได้ $25x^2-49=(5x)^2-7^2=(5x-7)(5x+7)$

ดังนั้น $25x^2-49=(5x-7)(5x+7)$

5. การแยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

การแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวที่ได้ตัวประกอบเป็นพหุนามเลขชี้กำลังหนึ่งซ้ำกัน เรียกพหุนามเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวนี้ว่า กำลังสองสมบูรณ์ รูปทั่วไปของพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ คือ

$a^2+2ab+b^2$ และ $a^2-2ab+b^2$ เมื่อ a และ b เป็นพหุนาม และแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b) \quad \text{และ} \quad a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 17 จงแยกตัวประกอบของ

1) x^2+6x+9
2) $x^2-12x+36$
3) $4x^2+4x+1$
4) $25x^2-20x+4$

วิธีทำ

1) x^2+6x+9

จะได้ $x^2+6x+9=x^2+2\cdot3\cdot x+3^2$

$=(x+3)(x+3)$

ดังนั้น $x^2+6x+9=(x+3)(x+3)$

2) $x^2-12x+36$

จะได้ $x^2-12x+36=x^2-2\cdot6\cdot x+6^2$

$=(x-6)(x-6)$

ดังนั้น $x^2-12x+36=(x-6)(x-6)$

3) $4x^2+4x+1$

จะได้ $4x^2+4x+1=(2x)^2-2\cdot1\cdot(2x)+1^2$

$=(2x+1)(2x+1)$

ดังนั้น $4x^2+4x+1=(2x+1)(2x+1)$

4) $25x^2-20x+4$

จะได้ $25x^2-20x+4=(5x)^2-2\cdot 2\cdot (5x)+2^2$

$$=(5x-2)(5x-2)$$

ดังนั้น $25x^2-20x+4=(5x-2)(5x-2)$

6. การแยกตัวประกอบพหุนามโดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

การแยกตัวประกอบพหุนามโดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ มีขั้นตอนดังนี้

1. ทำสัมประสิทธิ์ของ x^2 ให้เป็นหนึ่ง (ดึงสัมประสิทธิ์ของ x^2 ออก)
2. จัดพจน์ที่สองคือพจน์ของ x (พจน์กลาง) ให้เป็น $2\cdot x\cdot m$

   ซึ่ง $2\cdot x\cdot m=\frac{b}{a}x$
3. นำเอา m^2 บวกเพิ่มเข้าและหักออกเป็นพจน์ที่สามและสี่ตามลำดับ
4. จัดจำนวนสามพจน์แรกให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์คือ

   $(x+m)^2$ หรือ $(x-m)^2$
5. หาผลลัพธ์ของ $-m^2+\frac{c}{a}$ โดยผลลัพธ์ที่หาได้ต้องเป็นจำนวนจริงลบ

   เท่านั้นจึงจะใช้ ผลต่างกำลังสอง แยกตัวประกอบอีกครั้งหนึ่ง

   ซึ่งจะได้รากที่เป็นจำนวนจริงสามารถแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-m^2+\frac{c}{a}\right];\ m=\frac{b}{2a}
\end{aligned}
$$

ถ้า $-m^2+\frac{c}{a}\leq 0$ แล้ว พหุนามจะมีรากเป็นจำนวนจริง

ถ้า $-m^2+\frac{c}{a}>0$ แล้ว พหุนามจะมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่างที่ 18 จงแยกตัวประกอบของ x^2+2x-2 โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
x^2+2x-2 &= x^2+2\cdot 1\cdot x-2\\
&= x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2-2\\
&= (x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2)-3\\
&= (x+1)^2-3\\
&= (x+1)^2-(\sqrt{3})^2\\
&= (x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2+2x-2=(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

ตัวอย่างที่ 19 จงแยกตัวประกอบของ $2x^2-x-3$ โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
2x^2-x-3 &= 2\left[x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\\
&= 2\left[x^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\right]\\
&= 2\left[\left(x^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot x+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{24}{16}\right]\\
&= 2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]\\
&= 2\left[\left(x-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)\right]\\
&= 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)\right]\\
&= (2x-3)(x+1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $2x^2-x-3=(2x-3)(x+1)$

1.3.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังมากกว่าสอง

การแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังสองสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังมากกว่าสอง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 20 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^4 - 625$

วิธีทำ จาก $x^4 - 625 = (x^2)^2 - (25)^2$

$$= (x^2 - 25)(x^2 + 25)$$

$$= (x - 5)(x + 5)(x^2 + 25)$$

ดังนั้น $x^4 - 625 = (x - 5)(x + 5)(x^2 + 25)$

ตัวอย่างที่ 21 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $9x^3 + 45x^2 - 4x - 20$

วิธีทำ จาก $9x^3 + 45x^2 + 4x - 20 = (9x^3 - 4x) + (45x^2 - 20)$

$$= x(9x^2 - 4) + 5(9x^2 - 4)$$

$$= (x + 5)(9x^2 - 4)$$

$$= (x + 5)(3x - 2)(3x + 2)$$

ดังนั้น $9x^3 + 45x^2 - 4x - 20 = (x + 5)(3x - 2)(3x + 2)$

นอกจากนี้ยังมีวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังมากกว่าสองสามารถทำได้โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ และทฤษฎีบทการหารสังเคราะห์ ซึ่งต่อไปนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทต่อไปนี้

1. ทฤษฎีบทเศษเหลือ

กนก จุยคำวงศ์(2549:19) ได้กล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามมีความคล้ายกับการแยกตัวประกอบของจำนวนจริง กล่าวคือ ตัวประกอบที่แยกได้จะต้องหารพหุนามตัวเดิมลงตัวเสมอ ซึ่งถ้าหารลงตัวแสดงว่าเศษเป็นศูนย์ แต่ถ้าหารไม่ลงตัวแสดงว่าเศษไม่เป็นศูนย์ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงเศษของการหารพหุนาม P(x) ด้วย $x - c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยไม่ต้องดำเนินการหาร

เมื่อ P(x) คือพหุนาม $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$

ทฤษฎีบท 10 ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ P(x) เป็นพหุนามของ x จะได้ว่าเศษเหลือจากการหาร P(x) ด้วย $x - c$ ก็คือ ค่าของพหุนาม P(x) เมื่อ $x = c$ หรือ P(c) นั่นเอง (มานัส บุญยัง,2545:51)

จากทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้น พบข้อสังเกตว่า

1. ถ้า $P(c) = 0$ แล้ว P(x) มี $x - c$ เป็นตัวประกอบ
2. ถ้า c เป็นรากของสมการ $P(x) = 0$ แล้ว $x - c$ เป็นตัวประกอบร่วมของ P(x)
3. ถ้า $P(c) \neq 0$ แล้ว $x - c$ หาร P(x) ไม่ลงตัวหรือ $x - c$ ไม่เป็นตัวประกอบของ P(x)

ตัวอย่างที่ 22 จงหาเศษเหลือเมื่อหาร $x^3 - 3x^2 + 2x - 15$ ด้วย $x - 4$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 15$

จาก $x - 4$ จะได้ $c = 4$

เศษเหลือจะเท่ากับ $P(4) = 4^3 - 3(4)^2 + 2(4) - 15$

$= 64 - 24 + 8 - 15$

$= 33$

ดังนั้น เศษเหลือเมื่อหาร $x^3 - 3x^2 + 2x - 15$ ด้วย $x - 4$ เท่ากับ 33

ตัวอย่างที่ 23 จงหาเศษเหลือเมื่อหาร $x^4 + 5x^3 + 2x + 5$ ด้วย $x + 2$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^4 + 5x^3 + 2x + 5$

จาก $x + 2$ จะได้ $c = -2$

เศษเหลือจะเท่ากับ $P(-2) = (-2)^4 + 5(-2)^2 + 2(-2) + 5$

$= 16 + 20 - 4 + 5$

$= 37$

ดังนั้น เศษเหลือเมื่อหาร $x^4 + 5x^3 + 2x + 5$ ด้วย $x + 2$ เท่ากับ 37

ตัวอย่างที่ 24 ถ้า k เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ $x-2$ หาร x^5-3x^4+6x+k เหลือเศษเท่ากับ 4 แล้ว k มีค่าเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=x^5-3x^4+6x+k$

จาก $x-2$ จะได้ $c=2$

และเศษเหลือ $P(2)=4$

จะได้ว่า $P(2)=(2)^5-3(2)^4+6(2)+k$

$4=(2)^5-3(2)^4+6(2)+k$

$4=32-48+12+k$

$k=8$

ดังนั้น $k=8$ ที่ทำให้ $x-2$ หาร x^5-3x^4+6x+k เหลือเศษเท่ากับ 4

2. ทฤษฎีบทตัวประกอบ

เมื่อ P(x) คือพหุนาม $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n,a_{n-1},a_{n-2},...a_1,a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n\neq 0$ พหุนาม P(x) จะมี $x-c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $P(c)=0$

ตัวอย่างที่ 25 จงแสดงว่า $x-2$ เป็นตัวประกอบของ x^3-5x^2+2x+8

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=x^3-5x^2+2x+8$

จาก $x-2$ จะได้ $c=2$

เศษเหลือจะเท่ากับ $P(2)=2^3-5(2)^2+2(2)+8$

$=8-20+4+8$

$=0$

จะได้ว่า $P(2)=0$

นั่นคือ เศษเหลือเมื่อหาร x^3-5x^2+2x+8 ด้วย $x-2$ เท่ากับ 0

ดังนั้น $x-2$ เป็นตัวประกอบของ x^3-5x^2+2x+8

ตัวอย่างที่ 26 $x-3$ เป็นตัวประกอบของ $x^3-7x^2-5x+75$ หรือไม่

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=x^3-7x^2-5x+75$

และจาก $x-3$ จะได้ $c=3$

แทน $c=3$ ใน $P(x)$ จะได้ $P(3)=(3)^3-7(3)^2-5(3)+75$

$=27-63-15+75$

$=24$

จะได้ว่า $P(3)\neq 0$

นั่นคือ เศษเหลือเมื่อหาร $x^3-7x^2-5x+75$ ด้วย $x-3$ เท่ากับ 24

ดังนั้น $x-3$ ไม่เป็นตัวประกอบของ $x^3-7x^2-5x+75$

3. ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ

เมื่อ $P(x)$ คือพหุนาม $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n,a_{n-1},a_{n-2},...a_1,a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n\neq 0$ ถ้า $x-\frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m\neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 หรือ $(k,m)=1$ แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0

หมายเหตุ สัญลักษณ์ (k,m) คือ ห.ร.ม. ของ k กับ m

ตัวอย่างที่ 27 จงหาตัวประกอบของ $6x^3+31x^2+30x+8$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=6x^3+31x^2+30x+8$

หาตัวประกอบของ 8 ได้แก่ $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

และตัวประกอบของ 6 ได้แก่ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

เลือก $k=-1$ และ $m=2$ ซึ่ง $(-1,2)=1$

จะได้ $\frac{k}{m}=\frac{-1}{2}$

แทนค่า $\frac{k}{m}=\frac{-1}{2}$ ใน $P(x)$ จะได้

$$P\left(\frac{-1}{2}\right)=6\left(\frac{-1}{2}\right)^{3}+31\left(\frac{-1}{2}\right)^{2}+30\left(\frac{-1}{2}\right)+8$$

$$=-\frac{6}{8}+\frac{31}{4}-\frac{30}{2}+8$$

$$=0$$

นั่นคือ $P\left(\frac{-1}{2}\right)=0$

ดังนั้น $2x+1$ เป็นตัวประกอบของ $6x^{3}+31x^{2}+30x+8$

นอกจากนี้ยังมีตัวประกอบอีก 2 ตัว เราสามารถหาได้ทำนองเดียวกัน นั่นคือ เลือก $\frac{k}{m}$ จากตัวประกอบของ a_n และ a_0

การแยกตัวประกอบของพหุนามซึ่งมีเลขชี้กำลังมากกว่าสองสามารถประยุกต์ใช้จากทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะดังนี้

1. หาจำนวนซึ่งจะนำมาแทนค่าเป็น c ใน P(c) โดยหาจากตัวประกอบของค่าคงตัวของพหุนามที่ต้องการแยกตัวประกอบ
2. นำ c ที่ได้มาแทนค่าใน P(c)
3. หาค่า c ซึ่งทำให้ $P(c)=0$
4. นำค่า c ที่ได้มาสร้างเป็น $x-c$ ซึ่งเป็นตัวประกอบของพหุนามที่ต้องการแยกตัวประกอบ
5. นำ $x-c$ ไปหารพหุนามที่ต้องการแยกตัวประกอบ
6. ผลหารที่ได้อาจต้องนำไปแยกตัวประกอบด้วยวิธีอื่นอีก
7. ตัวประกอบของพหุนามอยู่ในรูปผลคูณของ $x-c$ กับพหุนามที่เป็นผลหาร

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 28 จงแยกตัวประกอบของ $x^3-2x^2-23x+60$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=x^3-2x^2-23x+60$

ตัวประกอบของ 60 ได้แก่

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm30, \pm60$

เลือก $c=1$ แทนใน $P(x)$

จะได้ $P(1)=1^3-2(1)^2-23(1)+60$

$P(1)=36$

ดังนั้น $x-1$ ไม่เป็นตัวประกอบของ $x^3-2x^2-23x+60$

เลือก $c=-5$ แทนใน $P(x)$

จะได้ $P(-5)=(-5)^3-2(-5)^2-23(-5)+60$

$P(-5)=0$

ดังนั้น $x+5$ เป็นตัวประกอบของ $x^3-2x^2-23x+60$

เพราะฉะนั้น $x^3-2x^2-23x+60=(x+5)(x^2-7x+12)$

$=(x+5)(x-3)(x-4)$

ดังนั้น $x^3-2x^2-23x+60=(x+5)(x-3)(x-4)$

ตัวอย่างที่ 29 จงแยกตัวประกอบของ $x^4+12x^3+42x^2+20x-75$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=x^4+12x^3+42x^2+20x-75$

ตัวประกอบของ 75 ได้แก่ $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15, \pm25, \pm75$

เลือก $c=1$ แทนใน $P(x)$

จะได้ $P(1)=1^4+12(1)^3+42(1)^2+20(1)-75$

$=1+12+42+20-75=0$

นั่นคือ $P(1)=0$

ดังนั้น $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $x^4+12x^3+42x^2+20x-75$

จะได้ $x^4+12x^3+42x^2+20x-75=(x-1)(x^3+13x^2+55x+75)$

จะเห็นว่าผลหาร ยังมีเลขชี้กำลังมากกว่าสอง ทำต่อไปอีกครั้ง

กำหนดให้ $P(x) = x^3 + 13x^2 + 55x + 75$

ตัวประกอบของ 75 ได้แก่ $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm 25, \pm 75$

เลือก $c = -3$ แทนใน $P(x)$

จะได้ $P(-3) = (-3)^3 + 13(-3)^2 + 55(-3) + 75$

$= 27 + 117 - 165 + 75$

$= 0$

นั่นคือ $P(-3) = 0$

ดังนั้น $x + 3$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + 13x^2 + 55x + 75$

เพราะฉะนั้น $x^3 + 13x^2 + 55x + 75 = (x+3)(x^2 + 10x + 25)$

และ $x^4 + 12x^3 + 42x^2 + 20x - 75 = (x-1)(x+3)(x^2 + 10x + 25)$

$= (x-1)(x+3)(x+5)(x+5)$

ดังนั้น $x^4 + 12x^3 + 42x^2 + 20x - 75 = (x-1)(x+3)(x+5)(x+5)$

ตัวอย่างที่ 30 จงแยกตัวประกอบของ $12x^3 - 8x^2 - 13x - 3$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 13x - 3$

ตัวประกอบของ 3 ได้แก่ $\pm 1, \pm 3$

ตัวประกอบของ 12 ได้แก่ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

เลือก $\frac{k}{m} = -\frac{1}{3}$ แทนใน $P(x)$

จะได้ $P\left(-\frac{1}{3}\right) = 12\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 8\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 13\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$

$= -\frac{12}{27} - \frac{8}{9} + \frac{13}{3} - 3$

$= -\frac{12}{27} - \frac{24}{27} + \frac{117}{27} - \frac{81}{27}$

$= 0$

นั่นคือ $P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

ดังนั้น $3x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $12x^3 - 8x^2 - 13x - 3$

เพราะฉะนั้น $12x^3-8x^2-13x-3=(3x+1)(4x^2-4x-3)$

$=(3x+1)(2x-3)(2x+1)$

ดังนั้น $12x^3-8x^2-13x-3=(3x+1)(2x-3)(2x+1)$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าถ้า $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้วต้องหาผลหารต่อไปจนกว่าผลหารจะเป็นพหุนามเลขชี้กำลังสอง แล้วจึงแยกตัวประกอบต่อไปก็จะได้ตัวประกอบแต่ละตัวมีเลขชี้กำลังเท่ากับหนึ่ง แต่การหาผลหารอาจมีหลายวิธีในการหา ต่อไปนี้จะกล่าวถึงการหาผลหารโดยใช้ทฤษฎีบทการหารสังเคราะห์

4. ทฤษฎีบทการหารสังเคราะห์

การหารสังเคราะห์เป็นวิธีการหาผลหารและเศษเหลือของการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x-c$ เมื่อ $c\in\mathbb{R}$ ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายรวดเร็วประหยัดเวลา และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าของพหุนาม $P(x)$ ที่จำนวนจริง c ใดๆ ได้อีกด้วย

กำหนดให้ $P(x)$ คือ $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n,a_{n-1},a_{n-2},...a_1,a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n\neq 0$ และ $P(x)$ หารด้วย $x-c$ เมื่อ $c\neq 0$ ได้ผลหาร $Q(x)$ และได้เศษเหลือ $P(c)$ จะมีวิธีการดังต่อไปนี้

1. แถวที่หนึ่งคือสัมประสิทธิ์ของตัวตั้ง $P(x)$ เรียงเลขชี้กำลังจากมากไปหาน้อยโดยเริ่มต้นจาก $a_n,a_{n-1},a_{n-2},...,a_0$ และเขียน c ไว้ข้างหน้า a_n จากขั้นตอนข้างต้นแสดงได้ดังนี้

$$\begin{array}{c|ccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \end{array}$$

2. แถวที่สามหลักที่หนึ่ง กำหนดให้เป็น b_n ซึ่ง $b_n=a_n$ แล้วนำ c คูณ b_n ได้ cb_n นำไปใส่ในแถวที่สองหลักที่สอง จากนั้นนำ a_{n-1} บวกกับ cb_n ได้ b_{n-1} ใส่ในแถวที่สามหลักที่สอง จากขั้นตอนข้างต้นแสดงได้ดังนี้

$$\begin{array}{c|ccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & cb_n & & & & & \\ \hline & b_n & b_{n-1} & & & & & \end{array}$$

3. นำ c คูณกับ b_{n-1} จะได้ cb_{n-1} นำไปใส่ในแถวที่สองหลักที่สาม จากนั้นนำ a_{n-2} บวกกับ cb_{n-1} ได้ b_{n-2} ใส่ในแถวที่สามหลักที่สาม

จากขั้นตอนข้างต้นแสดงได้ดังนี้

c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\cdots$	a_1	a_0
		cb_n	cb_{n-1}				
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}				

4. กระทำซ้ำต่อไปจนถึงตัวสุดท้ายได้ b_0 ที่ได้จาก a_0 บวกกับ cb_1 จะได้ว่า b_0 ก็คือ P(c) เป็นเศษของการหารครั้งนี้ จากขั้นตอนข้างต้นแสดงได้ดังนี้

c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\cdots$	a_1	a_0
		cb_n	cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\cdots$	cb_2	cb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0

จากขั้นตอนดังกล่าวจะได้

$b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots b_1$ เป็นสัมประสิทธิ์ของผลหารของการหาร

และ b_0 เป็นเศษของการหาร

ดังนั้น ผลหารคือ $b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + b_{n-2}x^{n-3} + \ldots + b_1$ เศษคือ b_0

ตัวอย่างที่ 31 จงแสดง $x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ หารด้วย $x - 3$ ลงตัว โดยวิธีการหารสังเคราะห์

วิธีทำ เรียงสัมประสิทธิ์ของตัวตั้ง $x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ จากเลขชี้กำลังมากไปน้อย จะได้ขั้นตอนการหารสังเคราะห์ดังนี้

3	1	-4	6	-9
		3	-3	9
	1	-1	3	0

นั่นคือ เศษเหลือจากการหาร $x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ หารด้วย $x - 3$ คือ 0

ดังนั้น $x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ หารด้วย $x - 3$ ลงตัว

ตัวอย่างที่ 32 จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $2x^4+3x^3-5x^2+7x-10$ หารด้วย $x-1$ โดยวิธีการหารสังเคราะห์

วิธีทำ เรียงสัมประสิทธิ์ของตัวตั้ง $2x^4+3x^3-5x^2+7x-10$ จากเลขชี้กำลังมากไปน้อย จะได้ขั้นตอนการหารสังเคราะห์ดังนี้

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 3 & -5 & 7 & -10 \\ & & 2 & 5 & 0 & 7 \\ \hline & 2 & 5 & 0 & 7 & -3 \end{array}$$

ดังนั้น $2x^4+3x^3-5x^2+7x-10$ หารด้วย $x-1$

ได้ผลหารคือ $2x^3+5x^2+7$ และเศษเหลือเท่ากับ -3

1.3.3 การแก้สมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว

การแก้สมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว เป็นการหาคำตอบที่นำคำตอบมาแทนค่าแล้วทำให้สมการเป็นจริง ซึ่งต้องนำความรู้ข้างต้นมาประกอบในการหาค่าของสมการ ดังนิยามและวิธีแก้สมการต่อไปนี้

บทนิยาม 4 การแก้สมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว หมายถึง การหาคำตอบที่สอดคล้องกับสมการ $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว ที่ $a\neq 0$

การแก้สมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 การแยกตัวประกอบ มีหลักการ ดังนี้

1. จัดสมการให้อยู่ในรูป $ax^2+bx+c=0$
2. แยกตัวประกอบของพหุนามเลขชี้กำลังสอง
3. ใช้หลักการที่ว่า เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $ab=0$ แล้ว $a=0$ หรือ $b=0$

ตัวอย่างที่ 33 จงหาคำตอบของสมการ $3x^2 - 18x = 0$

วิธีทำ จากสมการ $3x^2 - 18x = 0$

จะได้ว่า $3x(x - 6) = 0$

$3x = 0$ หรือ $x - 6 = 0$

นั่นคือ $x = 0$ หรือ $x = 6$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 0$ หรือ $x = 6$

ตัวอย่างที่ 34 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 7x + 12 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 - 7x + 12 = 0$

จะได้ว่า $(x - 3)(x - 4) = 0$

$x - 3 = 0$ หรือ $x - 4 = 0$

นั่นคือ $x = 3$ หรือ $x = 4$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $x^2 - 7x + 12 = 0$ คือ $x = 3$ หรือ $x = 4$

ตัวอย่างที่ 35 จงหาคำตอบของสมการ $4x^2 - 7x + 3 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $4x^2 - 7x + 3 = 0$

จะได้ว่า $(4x - 3)(x - 1) = 0$

$4x - 3 = 0$ หรือ $x - 1 = 0$

นั่นคือ $x = \frac{3}{4}$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $4x^2 - 7x + 3 = 0$ คือ $x = \frac{3}{4}$ หรือ $x = 1$

วิธีที่ 2 การใช้สูตร มีหลักการ ดังนี้

1. จัดสมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวให้อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$
2. ตรวจสอบว่าสมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวมีคำตอบหรือไม่ โดยแทนค่า $b^2 - 4ac$ ได้ดังนี้

   2.1 ถ้า $b^2 - 4ac \geq 0$ แล้วสมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียวมีคำตอบ

2.2 ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้วสมการเลขชี้กำลังสอง ตัวแปรเดียวไม่มีคำตอบ

3. หาคำตอบของสมการ มีดังนี้

3.1 ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ คำตอบของสมการเลขชี้กำลังสอง ตัวแปรเดียวมี 2 คำตอบ คือ

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ และ } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.2 ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ คำตอบของสมการเลขชี้กำลังสอง ตัวแปรเดียวมี 1 คำตอบ คือ $x = \frac{-b}{2a}$

3.3 ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ คำตอบของสมการเลขชี้กำลังสอง ตัวแปรเดียวไม่มี

ตัวอย่างที่ 36 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 6x + 3 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + 6x + 3 = 0$

จะได้ $a = 1, b = 6$ และ $c = 3$

แทนค่า $b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(3) = 36 - 12 = 24 > 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ มี 2 คำตอบ คือ

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ และ } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} \text{ และ } x = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{24}}{2} \text{ และ } x = \frac{-6 - \sqrt{24}}{2}$$

$$x = -3 + \sqrt{6} \text{ และ } x = -3 - \sqrt{6}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $x^2 + 6x + 3 = 0$ คือ $-3 + \sqrt{6}$ และ $-3 - \sqrt{6}$

ตัวอย่างที่ 37 จงหาคำตอบของสมการ $-x^2+6x-9=0$

วิธีทำ จากสมการ $-x^2+6x-9=0$

จะได้ $a=-1, b=6$ และ $c=-9$

แทนค่า $b^2-4ac=6^2-4(-1)(-9)=36-36=0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้ มี 1 คำตอบ คือ

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2(-1)}=3$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $-x^2+6x-9=0$ คือ $x=3$

ตัวอย่างที่ 38 จงหาคำตอบของสมการ $x^2+x+2=0$

วิธีทำ จากสมการ $x^2+x+2=0$

ได้ $a=1, b=1$ และ $c=2$

แทนค่า $b^2-4ac=1^2-4(1)(2)=1-8=-7<0$

จะได้ว่า ไม่มีคำตอบของสมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว

ดังนั้น สมการ $x^2+x+2=0$ ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 39 สนามแห่งหนึ่งมีความกว้าง $2x+2$ เมตร ยาว $3x-1$ เมตร ถ้าสนามแห่งนี้มีพื้นที่ 168 ตารางเมตร สนามมีความยาวรอบรูปเท่าไร

วิธีทำ

โจทย์กำหนดให้	ความกว้าง	$2x+2$	เมตร
	ความยาว	$3x-1$	เมตร
	พื้นที่สนาม	168	ตารางเมตร

จากสูตรการหา พื้นที่สนาม = ความกว้าง × ความยาว

$$168=(2x+2)(3x-1)$$

$$168=6x^2+4x-2$$

$$6x^2+4x-170=0$$

$$3x^2+2x-85=0$$

ต่อไปจะหาค่า x โดยการใช้สูตร

จากสมการ $3x^2 + 2x - 85 = 0$

จะได้ $a = 3, b = 2$ และ $c = -85$

แทนค่า $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)(-85) = 4 + 1{,}020 = 1{,}024 > 0$

จะได้ว่า คำตอบของสมการนี้มี 2 คำตอบ คือ

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(3)(-85)}}{2(3)} \quad \text{และ} \quad x = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(3)(-85)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{1{,}024}}{6} \quad \text{และ} \quad x = \frac{-2 + \sqrt{1{,}024}}{6}$$

$$x = \frac{-2 + 32}{6} \quad \text{และ} \quad x = \frac{-2 - 32}{6}$$

$$x = 5 \quad \text{และ} \quad x = -\frac{17}{3}$$

เนื่องจากความยาวเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $x = 5$ จึงเป็นคำตอบเท่านั้น

ดังนั้น สนามมีความยาวรอบรูป $2[2(5) + 2] + [3(5) - 1] = 52$ เมตร

ตัวอย่างที่ 40 กำลังสองของจำนวนหนึ่งลบด้วยห้าเท่าของจำนวนนั้นมีค่าเป็น 66 จำนวนนั้นมีค่าเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้ จำนวนนั้นเป็น x

กำลังสองของจำนวนนั้นเป็น x^2

ห้าเท่าของจำนวนนั้นเป็น $5x$

จะได้ว่า $x^2 - 5x = 66$

$$x^2 - 5x - 66 = 0$$

จะหาค่าของ x โดยวิธีการแยกตัวประกอบ จะได้

$$(x - 11)(x + 6) = 0$$

จะได้ว่า $x - 11 = 0$ หรือ $x + 6 = 0$

$$x = 11 \text{ หรือ } x = -6$$

ดังนั้น จำนวนนั้น คือ 11, -6

1.3.4 การแก้สมการเลขชี้กำลังมากกว่าสอง

การแก้สมการเลขชี้กำลังมากกว่าสองสามารถทำได้โดยการแยกตัวประกอบของพหุนามให้อยู่ในรูปผลคูณของพหุนามซึ่งตัวแปรมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง แล้วจึงหาคำตอบของสมการ สำหรับการแยกตัวประกอบของพหุนามทำได้โดยการแยกตัวประกอบด้วยวิธีต่างๆ หรือการใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ และทฤษฎีบทการหารสังเคราะห์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 41 จงหาคำตอบของสมการ $6x^3+13x^2-5x=0$

วิธีทำ จากสมการ $6x^3+13x^2-5x=0$

$$x(6x^2+13x-5)=0$$

$$x(2x+5)(3x-1)=0$$

$x=0$ หรือ $2x+5=0$ หรือ $3x-1=0$

จะได้ $x=0$ หรือ $x=-\frac{5}{2}$ หรือ $x=\frac{1}{3}$

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=0$ หรือ $x=-\frac{5}{2}$ หรือ $x=\frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 42 จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^3-x^2-5x-3=0$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=x^3-x^2-5x-3$

เลือก $x=3$ แทนใน $P(x)$

จะได้ $P(3)=(3)^3-(3)^2-5(3)-3=27-9-15-3=0$

นั่นคือ $x-3$ หาร x^3-x^2-5x-3 ลงตัว

ต่อไปจะหาผลหารจากการหาร x^3-x^2-5x-3 ด้วย $x-3$

โดยวิธีการหารสังเคราะห์

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & & 3 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

นั่นคือ ผลหารจากการหาร x^3-x^2-5x-3 ด้วย $x-3$ คือ x^2+2x+1

ได้ว่า $x^3-x^2-5x-3=(x-3)(x^2+2x+1)=(x-3)(x+1)(x+1)$

และพิจารณา $x^3-x^2-5x-3=0$

จะได้ $(x-3)(x+1)(x+1)=0$

นั่นคือ $x=3,-1,-1$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-1,3\}$

ตัวอย่างที่ 43 จงหาเซตคำตอบของ $x^3-2x^2-x+2=0$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x)=x^3-2x^2-x+2$

เลือก $x=1$ แทนใน $P(x)$

จะได้ $P(1)=(1)^3-2(1)^2-(1)+2=1-2-1+2=0$

นั่นคือ $x-1$ หาร x^3-2x^2-x+2 ลงตัว

ต่อไปจะหาผลหารจากการหาร x^3-2x^2-x+2 ด้วย $x-1$

โดยวิธีการหารสังเคราะห์

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

นั่นคือ ผลหารจากการหาร x^3-2x^2-x+2 ด้วย $x-1$ คือ x^2-x-2

ได้ว่า $x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x-2)(x+1)$

และพิจารณา $x^3-2x^2-x+2=0$

จะได้ $(x-1)(x-2)(x+1)=0$

นั่นคือ $x=1,2,-1$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-1,1,2\}$

1.3.5 สมบัติของการไม่เท่ากัน

ในการเปรียบเทียบจำนวนสองจำนวน นอกจากการเปรียบเทียบว่าเท่ากันและไม่เท่ากัน ยังมีการเปรียบเทียบว่ามากกว่าหรือน้อยกว่าได้โดยการเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ เช่น กำหนดให้ n แทนจำนวนเต็ม

$n > 5$ หมายถึง จำนวนเต็มทุกจำนวนที่มากกว่า 5 เช่น 6,7,8,...

$n \leq 1$ หมายถึง จำนวนเต็มทุกจำนวนที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 เช่น

$1, 0, -1, -2, \ldots$

$n \neq 4$ หมายถึง จำนวนเต็มทุกจำนวนที่ไม่เท่ากับ 4 เช่น

$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, \ldots$

บทนิยาม 9 กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. $a < b$ หมายถึง a น้อยกว่า b
2. $a > b$ หมายถึง a มากกว่า b
3. $a \leq b$ หมายถึง a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
4. $a \geq b$ หมายถึง a มากกว่าหรือเท่ากับ b
5. $a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$
6. $a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$
7. $a < b \leq c$ หมายถึง $a < b$ และ $b \leq c$
8. $a \leq b < c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b < c$

จากบทนิยามข้างต้น ทำให้ได้ความสัมพันธ์เกี่ยวกับการไม่เท่ากัน ดังหัวข้อต่อไปนี้

1.3.5.1 สมบัติไตรวิภาค

สมบัติไตรวิภาค กล่าวไว้ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว a,b เป็นอย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 กรณีนี้

1. $a = b$
2. $a < b$
3. $a > b$

1.3.5.2 สมบัติของการไม่เท่ากัน

ให้ a,b,c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

3. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

กรณี 1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

กรณี 2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

4. สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$

5. สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

กรณี 1 ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$

กรณี 2 ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

6. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $ab > 0$

7. ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $ab > 0$

8. ถ้า $a < 0$ และ $b > 0$ แล้ว $ab < 0$

9. ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ แล้ว $ab < 0$

ตัวอย่างที่ 44 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

1) 1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด

2) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ แล้ว $-a < 0$

3) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a > b$ แล้ว $a - b > 0$

4) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

ถ้า $a > b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

5) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $a > b$ แล้ว $-a < -b$

6) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $a > b$ แล้ว $a^2 > b^2$

7) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว $a < b$

วิธีทำ

1) 1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด

เป็นจริง

2) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ แล้ว $-a < 0$

เป็นเท็จ

3) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a > b$ แล้ว $a - b > 0$

เป็นจริง

4) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

ถ้า $a > b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

เป็นเท็จ

5) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $a > b$ แล้ว $-a < -b$

เป็นจริง

6) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $a > b$ แล้ว $a^2 > b^2$

เป็นเท็จ

7) กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว $a < b$

เป็นเท็จ

1.3.5.3 ช่วง

บทนิยาม 10 ช่วง (Interval) หมายถึง เซตย่อยของจำนวนจริงที่มีสมาชิกเป็นจำนวนอนันต์และสมาชิกมีความต่อเนื่องกันจนไม่สามารถแยกออกจากกันได้

ช่วง ในจำนวนจริงแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. ช่วงจำกัด (Finite interval)
2. ช่วงอนันต์ (Infinite interval)

ช่วงจำกัด หมายถึง ช่วงที่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดปลายโดยมีขอบเขตชัดเจน ช่วงจำกัดมี 4 ลักษณะดังนี้

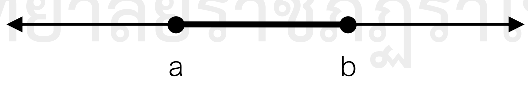
ให้ a,b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $a < b$

1. ช่วงเปิด (Open interval) เขียนแทนด้วย (a,b) หมายถึง

$\{x | a < x < b\}$ เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้

2. ช่วงปิด (Closed interval) เขียนแทนด้วย $[a,b]$ หมายถึง

$\{x | a \leq x \leq b\}$ เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้



3. ช่วงครึ่งเปิด (Half-open interval) เขียนแทนด้วย $(a,b]$ หมายถึง $\{x|a<x\leq b\}$ เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้

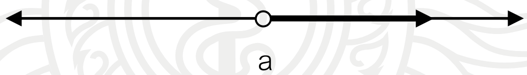
4. ช่วงครึ่งเปิด (Half-open interval) เขียนแทนด้วย $[a,b)$ หมายถึง $\{x|a\leq x<b\}$ เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้

ช่วงอนันต์ หมายถึง ช่วงที่ไม่มีจุดปลายหรือจุดเริ่มต้น

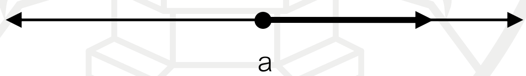
ช่วงอนันต์มี 5 ลักษณะดังนี้

ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

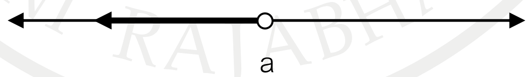
1. ช่วง (a,∞) หมายถึง $\{x|x>a\}$
เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้



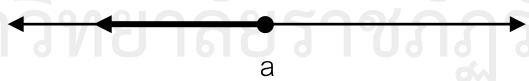
2. ช่วง $[a,\infty)$ หมายถึง $\{x|x\geq a\}$
เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้



3. ช่วง $(-\infty,a)$ หมายถึง $\{x|x<a\}$
เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้



4. ช่วง $(-\infty,a]$ หมายถึง $\{x|x\leq a\}$
เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้



5. ช่วง $(-\infty,\infty)$ หมายถึง เซตของจำนวนจริง $(\mathbb{R})$
เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนดังนี้

1.3.6 การแก้อสมการ

การแก้อสมการ เป็นการแก้อสมการหาคำตอบที่ทำให้อสมการเป็นจริง ซึ่งต้องอาศัยสมบัติของจำนวนจริงในการหาคำตอบ ดังนิยามและวิธีการหาคำตอบต่อไปนี้

บทนิยาม 11 อสมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึง ความสัมพันธ์ของตัวแปรกับจำนวนใดๆ โดยมีเครื่องหมาย $>, <, \geq, \leq, \neq$ เป็นตัวระบุความสัมพันธ์ของตัวแปรและจำนวนดังกล่าว

การแก้อสมการ หมายถึง การหาเซตคำตอบของอสมการหรือเซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง ซึ่งเมื่อนำสมาชิกเหล่านี้ไปแทนค่าตัวแปรในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริง

คำตอบของอสมการ หมายถึง จำนวนที่แทนตัวแปรในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริงหรือสอดคล้องกับอสมการนั้น

เซตคำตอบของอสมการ หมายถึง เซตของจำนวนทั้งหมดที่แทนตัวแปรในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริงหรือสอดคล้องกับอสมการนั้น

ในการแก้อสมการหรือหาเซตคำตอบของอสมการ จะต้องอาศัยสมบัติการไม่เท่ากัน ที่กล่าวมาข้างต้นมาใช้ในการหาเซตคำตอบ

หลักในการแก้อสมการเลขชี้กำลังหนึ่งตัวแปรเดียว
เราอาศัยสมบัติของการไม่เท่ากันต่อไปนี้ ในการแก้อสมการ
ถ้า a,b,c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a > b$ แล้ว $a+c > b+c$
2. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

   กรณี 1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

   กรณี 2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

ตัวอย่างที่ 45 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2x+1<9$

วิธีทำ จากอสมการ $2x+1<9$

นำ (-1) บวกทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $2x+1+(-1)<9+(-1)$

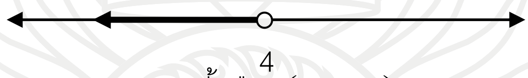
$$2x<8$$

นำ $\frac{1}{2}$ คูณทั้งสองข้างของอสมการ

จะได้ $\frac{1}{2}(2x)<\frac{1}{2}(8)$

$$x<4$$

เขียนบนเส้นจำนวน จะได้



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $(-\infty,4)$

ตัวอย่างที่ 46 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $4x-5\leq 2x+5$

วิธีทำ จากอสมการ $4x-5\leq 2x+5$

จะได้ $4x-5+5\leq 2x+5+5$

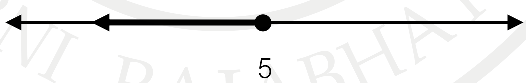
$$4x\leq 2x+10$$

$$4x-2x\leq 2x+10-2x$$

$$2x\leq 10$$

$$x\leq 5$$

เขียนบนเส้นจำนวน จะได้ว่า



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $(-\infty,-5]$

หลักการแก้อสมการเลขชี้กำลังมากกว่าหนึ่ง มีดังนี้

1. วิธีโดยตรง

ขั้นที่ 1 ทำอสมการที่อยู่ในรูปขวามือให้เป็น 0

ขั้นที่ 2 ซ้ายมือของอสมการ ต้องทำให้อยู่ในรูปผลคูณของตัวประกอบที่มีเลขชี้กำลัง

เท่ากับหนึ่ง โดยที่สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรต้องเป็นจำนวนจริงบวก

ขั้นที่ 3 หาเซตคำตอบของอสมการ โดยแยกกรณีคิดดังต่อไปนี้

1) ถ้า $x \cdot y > 0$ แล้วจะต้องแบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณี 1 $x > 0$ และ $y > 0$ หรือ

กรณี 2 $x < 0$ และ $y < 0$

2) ถ้า $x \cdot y \geq 0$ แล้วจะต้องแบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณี 1 $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ หรือ

กรณี 2 $x \leq 0$ และ $y \leq 0$

3) ถ้า $x \cdot y < 0$ แล้วจะต้องแบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณี 1 $x > 0$ และ $y < 0$ หรือ

กรณี 1 $x < 0$ และ $y > 0$

4) ถ้า $x \cdot y \leq 0$ แล้วจะต้องแบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณี 1 $x \geq 0$ และ $y \leq 0$ หรือ

กรณี 2 $x \leq 0$ และ $y \geq 0$

หมายเหตุ 1. ถ้าเชื่อมส่วนต่างๆของอสมการด้วย หรือ ให้นำคำตอบแต่ละช่วงมา Union กัน

2. ถ้าเชื่อมส่วนต่างๆของอสมการด้วย และ ให้นำคำตอบแต่ละช่วงมา Intersection กัน

ตัวอย่างที่ 47 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2 - 3x - 4 < 0$

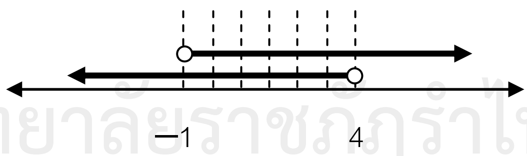
วิธีทำ จากอสมการ $x^2 - 3x - 4 < 0$

จะได้ว่า $(x-4)(x+1) < 0$

กรณี 1 $x - 4 < 0$ และ $x + 1 > 0$

จะได้ว่า $x < 4$ และ $x > -1$

เขียนบนเส้นจำนวน จะได้ว่า

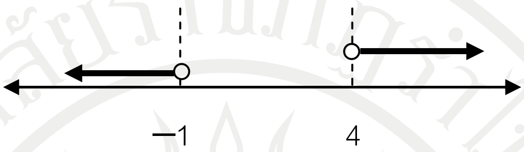


ดังนั้น เมื่อ $x - 4 < 0$ และ $x + 1 > 0$ แล้วจะได้ว่า $-1 < x < 4$

หรือกรณี 2 $x-4>0$ และ $x+1<0$

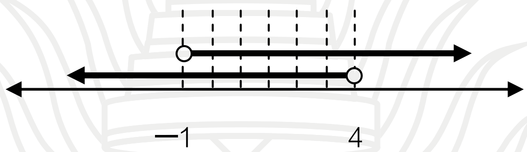
จะได้ว่า $x>4$ และ $x<-1$

เขียนบนเส้นจำนวน จะได้ว่า



ดังนั้น เมื่อ $x-4<0$ และ $x+1>0$ เป็นเซตว่าง

นำกรณี 1 และ กรณี 2 มา Union กัน จะได้



นั่นคือ เซตคำตอบของ $x^2-3x-4<0$ คือ $\{x \mid -1<x<4\}$

หรือ $(-1,4)$

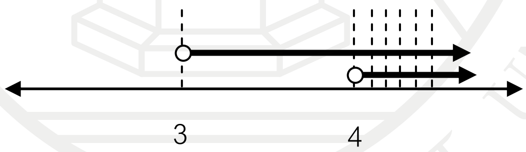
ตัวอย่างที่ 48 จงหาเซตคำตอบของ $(x-3)(x-4)>0$

วิธีทำ จากอสมการ $(x-3)(x-4)>0$

กรณี 1 $x-3>0$ และ $x-4>0$

จะได้ว่า $x>3$ และ $x>4$

เขียนบนเส้นจำนวน จะได้ว่า

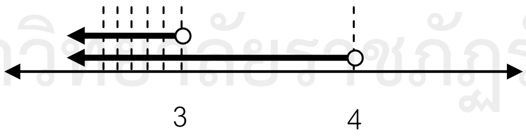


ดังนั้น เมื่อ $x-3>0$ และ $x-4>0$ แล้วจะได้ว่า $x>4$

หรือกรณี 2 $x-3<0$ และ $x-4<0$

จะได้ว่า $x<3$ และ $x<4$

เขียนบนเส้นจำนวน จะได้ว่า



ดังนั้น เมื่อ $x-3<0$ และ $x-4<0$ แล้วจะได้ว่า $x<3$

นำกรณี 1 และ กรณี 2 มา Union กัน จะได้

นั่นคือ เซตคำตอบของ $(x-3)(x-4)>0$ คือ $(-\infty,3)\cup(4,\infty)$

2. วิธีลัด มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำอสมการที่อยู่ในรูปขวามือให้เป็น 0

ขั้นที่ 2 ซ้ายมือของอสมการ ต้องทำให้อยู่ในรูปผลคูณของตัวประกอบเลขชี้กำลังหนึ่ง โดยที่สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรต้องเป็นจำนวนจริงบวก

ขั้นที่ 3 นำขอบเขตคำตอบของอสมการในขั้นที่ 2 มาเขียนลงบนเส้นจำนวน โดยเรียงจากน้อยไปมากและใส่เครื่องหมาย $+$ ในช่องขวามือสุดก่อน แล้วใส่มาทางซ้ายมือเป็น $-,+,-,\ldots$ สลับกันไปจนครบทุกช่อง

ขั้นที่ 4 พิจารณาช่วงคำตอบ ดังนี้

คำตอบของอสมการ $>$ อยู่ในช่วงที่มีเครื่องหมาย $+$ ไม่รวมจุดบนเส้นจำนวน

คำตอบของอสมการ $\geq$ อยู่ในช่วงที่มีเครื่องหมาย $+$ รวมจุดบนเส้นจำนวน

คำตอบของอสมการ $<$ อยู่ในช่วงที่มีเครื่องหมาย $-$ ไม่รวมจุดบนเส้นจำนวน

คำตอบของอสมการ $\leq$ อยู่ในช่วงที่มีเครื่องหมาย $-$ รวมจุดบนเส้นจำนวน

ตัวอย่างที่ 49 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $6x^2-x-12<0$

วิธีทำ จากอสมการ $6x^2-x-12<0$

จะได้ $(3x+4)(2x-3)<0$

จะได้จุดขอบเขต $x = -\frac{4}{3}, \frac{3}{2}$

พิจารณาช่วงคำตอบ

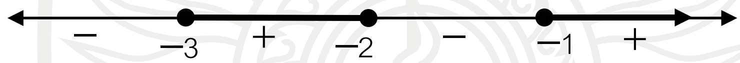
ดังนั้น เซตคำตอบของ $6x^2 - x - 12 < 0$ คือ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 50 จงหาเซตคำตอบของ $(x+1)(x+2)(x+3) \geq 0$

วิธีทำ จากอสมการ $(x+1)(x+2)(x+3) \geq 0$

จะได้จุดขอบเขต $x = -1, -2, -3$

พิจารณาช่วงคำตอบ



ดังนั้น เซตคำตอบของ $(x+1)(x+2)(x+3) \geq 0$ คือ $[-3, -2] \cup [-1, \infty)$

ตัวอย่างที่ 51 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$

วิธีทำ จากอสมการ $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$

จะได้ $\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$

$$\frac{(2x-1)}{(x+1)} \geq 0 \quad , x \neq -1, 1$$

จะได้จุดขอบเขต $x = \frac{1}{2}, -1$

พิจารณาช่วงคำตอบ

ดังนั้น เซตคำตอบของ $\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$ คือ

$$(-\infty,-1)\cup\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,\infty)$$

1.4 ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง เมื่อกำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ระยะจากจุดที่แทน 0 ถึงจุดที่แทนจำนวนจริง a เรียกว่า ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$ เช่น

$|6|$ หมายถึง ระยะจากจุด 0 ถึงจุดที่แทนจำนวน 6 ซึ่งเท่ากับ 6 หน่วย
ดังนั้น $|6|=6$

$|-6|$ หมายถึง ระยะจากจุด 0 ถึงจุดที่แทนจำนวน -6 ซึ่งเท่ากับ 6 หน่วย
ดังนั้น $|-6|=6$

บทนิยาม 12 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a สรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ 3 กรณีดังนี้ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $|a|=a$
2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ แล้ว $|a|=-a$
3. ถ้า a เป็นจำนวนจริงศูนย์ แล้ว $|a|=0$

หรือ $$|a|=\begin{cases} a & ; a>0 \\ -a & ; a<0 \\ 0 & ; a=0 \end{cases}$$

1.4.1 สมบัติของค่าสัมบูรณ์

เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $|x|=|-x|$
2. $|xy|=|x||y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y\neq 0$

4. $|x-y|=|y-x|$

5. $|x|^2=x^2=|x^2|$

6. $|x+y|\leq|x|+|y|$

7. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

$|x|<a$ หมายถึง $-a<x<a$

$|x|\leq a$ หมายถึง $-a\leq x\leq a$

8. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

$|x|>a$ หมายถึง $x<-a$ หรือ $x>a$

$|x|\geq a$ หมายถึง $x\leq -a$ หรือ $x\geq a$

ตัวอย่างที่ 52 จงหาค่าของ

1) $|-5|$
2) $|-0.5|$
3) $|8+3|$
4) $|-12|+|-6|$

วิธีทำ

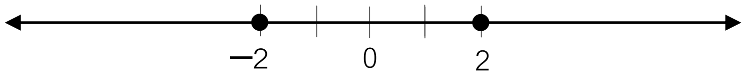
1) $|-5|=-(-5)=5$
2) $|-0.5|=-(-0.5)=0.5$
3) $|8+3|=|11|=11$
4) $|-12|+|-6|=-(-12)+(-(-6))=12+6=18$

1.4.2 การแก้สมการในรูปค่าสัมบูรณ์

สมการในรูปค่าสัมบูรณ์ คือ สมการที่ตัวแปรติดอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

การแก้สมการในรูปค่าสัมบูรณ์ ทำได้โดยการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปสมการที่ไม่มีค่าสัมบูรณ์

เมื่อพิจารณาบนเส้นจำนวน $|x|=a$ หมายถึง จุดแทน x อยู่ห่างจากจุดแทน 0 อยู่ a หน่วย เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก เช่น $|x|=2$ จุดแทน x คือจุดที่อยู่ห่างจากจุดแทน 0 อยู่ 2 หน่วย ซึ่งจุดทั้งสองจุดที่แทนด้วย 2 และ -2 แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก เซตคำตอบของ $|x|=a$ คือ $\{-a,a\}$

หมายเหตุ

1. ถ้า $a=0$ แล้ว คำตอบของสมการ $|x|=0$ มีคำตอบเดียว คือ $x=0$
2. ถ้า $a>0$ แล้ว คำตอบของสมการ $|x|=a$ มี 2 คำตอบ คือ $x=a$ และ $x=-a$
3. ถ้า $a<0$ แล้ว คำตอบของสมการ $|x|=a$ ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 53 จงหาคำตอบของสมการ $|2x-6|=10$

วิธีทำ จากสมการ $|2x-6|=10$

จะได้ $2x-6=10$ หรือ $2x-6=-10$

$2x=16$ หรือ $2x=-4$

$x=8$ หรือ $x=-2$

ตรวจสอบ แทน $x=8$ ในสมการ $|2x-6|=10$

จะได้ $|2(8)-6|=10$

$|10|=10$

$10=10$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x=-2$ ในสมการ $|2x-6|=10$

จะได้ $|2(-2)-6|=10$

$|-10|=10$

$10=10$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=8$ หรือ $x=-2$

ตัวอย่างที่ 54 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2x-1|=x+5$

วิธีทำ จากสมการ $|2x-1|=x+5$

จะได้ $2x-1=x+5$ หรือ $2x-1=-(x+5)$

$2x-x=5+1$ หรือ $2x+x=1-5$

$$x=6 \text{ หรือ } x=-\frac{4}{3}$$

ตรวจสอบ แทน $x=6$ ในสมการ $|2x-1|=x+5$

จะได้ $$|2(6)-1|=6+5$$

$$|11|=11$$

$$11=11 \text{ เป็นจริง}$$

ตรวจสอบ แทน $x=\frac{-4}{3}$ ในสมการ $|2x-1|=x+5$

จะได้ $$\left|2\left(-\frac{4}{3}\right)-1\right|=-\frac{4}{3}+5$$

$$\left|-\frac{8}{3}-\frac{3}{3}\right|=-\frac{4}{3}+\frac{15}{3}$$

$$\left|-\frac{11}{3}\right|=\frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{3}=\frac{11}{3} \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{-\frac{4}{3},6\right\}$

ตัวอย่างที่ 55 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|4x-3|=|3x+1|$

วิธีทำ จากสมการ $|4x-3|=|3x+1|$

จะได้ $$|4x-3|^2=|3x+1|^2$$

$$(4x-3)^2=(3x+1)^2$$

$$(4x-3)^2-(3x+1)^2=0$$

$$[(4x-3)-(3x+1)][(4x-3)+(3x+1)]=0$$

$$(x-4)(7x-2)=0$$

$$x=4,\frac{2}{7}$$

ตรวจสอบ แทน $x=4$ ในสมการ $|4x-3|=|3x+1|$

จะได้ $$|4(4)-3|=|3(4)+1|$$

$$|13|=|13|$$

$13 = 13$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x = \frac{2}{7}$ ในสมการ $|4x - 3| = |3x + 1|$

จะได้ $\left|4\left(\frac{2}{7}\right) - 3\right| = \left|3\left(\frac{2}{7}\right) + 1\right|$

$$\left|\frac{8}{7} - \frac{21}{7}\right| = \left|\frac{6}{7} + \frac{7}{7}\right|$$

$$\left|-\frac{13}{7}\right| = \left|\frac{13}{7}\right|$$

$$\frac{13}{7} = \frac{13}{7} \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{\frac{2}{7}, 4\right\}$

ตัวอย่างที่ 56 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2x + 5| = 3x - 1$

วิธีทำ จากสมการ $|2x + 5| = 3x - 1$

$$(|2x + 5|)^2 = (3x - 1)^2$$

$$(2x + 5)^2 = (3x - 1)^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$5x^2 - 26x - 24 = 0$$

$$(5x + 4)(x - 6) = 0$$

$$5x + 4 = 0 \text{ หรือ } x - 6 = 0$$

$$x = -\frac{4}{5} \text{ หรือ } x = 6$$

ตรวจสอบ แทน $x = -\frac{4}{5}$ ใน $|2x + 5| = 3x - 1$

จะได้ $\left|2\left(-\frac{4}{5}\right) + 5\right| = 3\left(-\frac{4}{5}\right) - 1$

$$\left|-\frac{8}{5} + \frac{25}{5}\right| = -\frac{12}{5} - \frac{5}{5}$$

$$\left|\frac{17}{5}\right| = -\frac{17}{5}$$

$$\frac{17}{5} = -\frac{17}{5} \text{ เป็นเท็จ}$$

ตรวจสอบ แทน $x = 6$ ใน $|2x + 5| = 3x - 1$

จะได้
$$|2(6) + 5| = 3(6) - 1$$
$$|17| = 17$$
$$17 = 17 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{6\}$

1.4.3 การแก้อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์

อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ คือ อสมการที่ตัวแปรติดอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ การแก้อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ ทำได้โดยการจัดรูปอสมการให้อยู่ในรูปอสมการที่ไม่มีค่าสัมบูรณ์ พิจารณาอสมการในรูป $|x| < a$ และ $|x| \leq a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก โดยอาศัยบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ และใช้เส้นจำนวนเป็นเครื่องช่วย จะได้ว่า

$|x| < a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 น้อยกว่า a หน่วย

นั่นคือ $|x| < a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $-a < x$ และ $x < a$

ซึ่งเขียนรวมกันเป็น $-a < x < a$

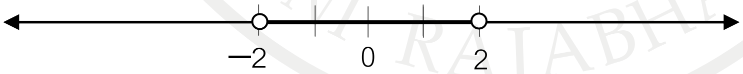
$|x| \leq a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 น้อยกว่าหรือเท่ากับ a หน่วย

นั่นคือ $|x| \leq a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $-a \leq x$ และ $x \leq a$

ซึ่งเขียนรวมกันเป็น $-a \leq x \leq a$

เช่น เมื่อ $a = 2$

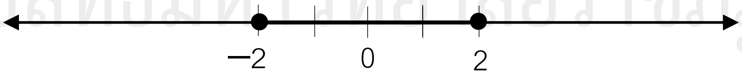
จาก $|x| < 2$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ซึ่งมีความหมายว่า $-2 < x < 2$

ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| < 2$ คือ $\{x \mid -2 < x < 2\}$

จาก $|x| \leq 2$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ซึ่งมีความหมายว่า $-2 \leq x \leq 2$

ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| \le 2$ คือ $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$|x| > a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 มากกว่า a หน่วย

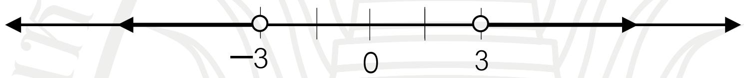
นั่นคือ $|x| > a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $x < -a$ หรือ $x > a$

$|x| \ge a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 มากกว่าหรือเท่ากับ a หน่วย

นั่นคือ $|x| \ge a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $x \le -a$ หรือ $x \ge a$

เช่น เมื่อ $a = 3$

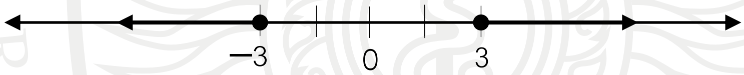
จาก $|x| > 3$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ซึ่งมีความหมายว่า $x < -3$ หรือ $x > 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| > 3$ คือ $\{x \mid x < -3$ หรือ $x > 3\}$

จาก $|x| \ge 3$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ซึ่งมีความหมายว่า $x \le -3$ หรือ $x \ge 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| \ge 3$ คือ $\{x \mid x \le -3$ หรือ $x \ge 3\}$

ทฤษฎีบท 10 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

1. $|x| < a$ ความหมายตรงกับ $-a < x < a$
2. $|x| \le a$ ความหมายตรงกับ $-a \le x \le a$
3. $|x| > a$ ความหมายตรงกับ $x < -a$ หรือ $x > a$
4. $|x| \ge a$ ความหมายตรงกับ $x \le -a$ หรือ $x \ge a$

ตัวอย่างที่ 57 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|3x + 3| < 12$

วิธีทำ จากอสมการ $|3x + 3| < 12$

จะได้ $-12 < 3x + 3 < 12$

$$-15 < 3x < 9$$

$$-5 < x < 3$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $\{x \mid -5 < x < 3\}$ หรือ $(-5, 3)$

ตัวอย่างที่ 58 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|5x-3| \leq 3x+3$

วิธีทำ อสมการจะมีคำตอบได้ เมื่อ $3x+3 \geq 0$ หรือ $x \geq -1$ ______(1)

จากอสมการ $|5x-3| \leq 3x+3$

จะได้ $-(3x+3) \leq 5x-3 \leq 3x+3$

$$-3x-3 \leq 5x-3 \leq 3x+3$$

$$-3x-3 \leq 5x-3 \text{ และ } 5x-3 \leq 3x+3$$

$$0 \leq 8x \text{ และ } 2x \leq 6$$

$$0 \leq x \text{ และ } x \leq 3$$

$$0 \leq x \leq 3 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

นำ (1) และ (2) มา intersection จะได้คำตอบของอสมการ

นั่นคือ $\{x|x>-1\} \cap \{x|0 \leq x \leq 3\} = \{x|0 \leq x \leq 3\}$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $\{x|0 \leq x \leq 3\}$ หรือ $[0,3]$

ตัวอย่างที่ 59 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x}{2}-3\right| \geq 2$

วิธีทำ จากอสมการ $\left|\frac{x}{2}-3\right| \geq 2$

จะได้ $\frac{x}{2}-3 \leq -2$ หรือ $\frac{x}{2}-3 \geq 2$

$\frac{x}{2} \leq 1$ หรือ $\frac{x}{2} \geq 5$

$x \leq 2$ หรือ $x \geq 10$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $(-\infty,2] \cup [10,\infty)$

ตัวอย่างที่ 60 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|2x^2-8x+3\right| \leq 3$

วิธีทำ จากอสมการ $\left|2x^2-8x+3\right| \leq 3$

จะได้ $2x^2-8x+3 \leq 3$ และ $-3 \leq 2x^2-8x+3$

$x^2-4x \leq 0$ และ $0 \leq x^2-4x+3$

$x(x-4) \leq 0$ และ $(x-1)(x-3) \geq 0$

$0 \leq x \leq 4$ และ $x \leq 1$ หรือ $x \geq 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $[0,1] \cup [3,4]$

ตัวอย่างที่ 61 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|2x-1| \le |x-3|$

วิธีทำ จากอสมการ $|2x-1| \le |x-3|$

จะได้ $|2x-1|^2 \le |x-3|^2$

$$(2x-1)^2 \le (x-3)^2$$

$$(2x-1)^2-(x-3)^2 \le 0$$

$$[(2x-1)-(x-3)][(2x-1)+(x-3)] \le 0$$

$$(x+2)(3x-4) \le 0$$

$$-2 \le x \le \frac{4}{3}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $\left[-2,\frac{4}{3}\right]$

1.5 การประยุกต์

ปัญหาต่างๆ ที่เกี่ยวข้องในชีวิตประจำวันบางปัญหา เราสามารถใช้ที่จะใช้ความรู้เรื่องสมการเลขชี้กำลังสองตัวแปรเดียว ช่วยในการแก้ปัญหาได้ ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับการการเดินทาง การเคลื่อนที่ อัตราเร็ว ระยะทาง เวลา พื้นที่ ปริมาตร และความยาว เป็นต้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 62 รถยนต์คันหนึ่งแล่นเป็นแนวเส้นตรงด้วยสมการ $s=t^4-4t^2+8t+2$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาระยะทางเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

วิธีทำ จากสมการ $s=t^4-4t^2+8t+2$

เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที รถยนต์แล่นได้ระยะทาง

$$s=2^4-4(2)^2+8(2)+2$$

$$=16-16+16+2$$

$$=18$$

ดังนั้น รถยนต์แล่นได้ระยะทาง 18 เมตร เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

ตัวอย่างที่ 63 นักผจญภัยคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาสูงจากพื้นดินด้านล่าง 256 เมตร เขาทิ้งท่อนไม้ท่อนหนึ่งลงมาจากยอดหน้าผาลงมาด้านล่าง ถ้าให้ h แทนความสูงของท่อนไม้ที่วัดจากพื้นดินด้านล่าง ในขณะที่เวลาผ่านไป t วินาที นับจากเริ่มปล่อย โดยที่ $h = -16t^2 + 256$ จงหาว่าท่อนไม้จะกระทบพื้นดินด้านล่างเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที เริ่มปล่อย

วิธีทำ ท่อนไม้จะกระทบพื้นดิน เมื่อ $h = 0$ เมตร

นั่นคือ $-16t^2 + 256 = 0$

$-16(t^2 - 16) = 0$

จะได้ $t^2 - 16 = 0$

$(t+4)(t-4) = 0$

ดังนั้น $t = -4$ หรือ $t = 4$

เนื่องจาก t แทนเวลา ที่นับจากเริ่มปล่อยซึ่ง $t \geq 0$

ดังนั้น ท่อนไม้จะกระทบพื้นดินด้านล่าง เมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที

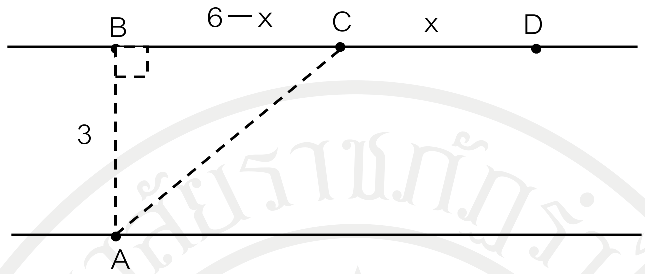
ตัวอย่างที่ 64 บ้านของจิราพรและบ้านของดวงกมล อยู่คนละฝั่งแม่น้ำตรงข้ามกันพอดี บ้านของอรุณอยู่ฝั่งเดียวกันกับบ้านของดวงกมล และอยู่ห่างจากบ้านของดวงกมล 6 กิโลเมตร ระหว่างบ้านของดวงกมลกับบ้านของอรุณ มีท่าเทียบเรือแห่งหนึ่ง โดยที่แม่น้ำกว้าง 3 กิโลเมตร และฝั่งแม่น้ำทั้งสองฝั่งอยู่ในแนวเส้นตรง จิราพรต้องการพายเรือออกจากบ้านของเขาไปที่ท่าเทียบเรือ แล้วขึ้นฝั่งเดินไปบ้านของอรุณ ถ้าเขาพายเรือด้วยอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และเดินด้วยความอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เขาจะใช้เวลาในเดินทางทั้งหมด 1.5 ชั่วโมง จงหาระยะทางระหว่างท่าเทียบเรือกับบ้านของอรุณ

วิธีทำ ให้ A แทนตำแหน่งบ้านของจิราพร

B แทนตำแหน่งบ้านของดวงกมล

C แทนตำแหน่งของท่าเทียบเรือ

D แทนตำแหน่งบ้านของอรุณ



ภาพที่ 1.2 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 64

สมมติให้ระยะทางระหว่างท่าเทียบเรือกับบ้านของอรุณ เท่ากับ x กิโลเมตร ดังนั้น $CD = x$ และ $BC = 6 - x$

ระยะทางในการพายเรือเท่ากับ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$$= \sqrt{3^2 + (6 - x)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 36 - 12x + x^2}$$

$$= \sqrt{45 - 12x + x^2}$$

เนื่องจากพายเรือด้วยอัตราเร็ว 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะได้

$$\text{เวลาในการพายเรือ} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{อัตราเร็ว}} = \frac{\sqrt{45 - 12x + x^2}}{5} \text{ ชั่วโมง}$$

ระยะทางในการเดินเท่ากับ CD เท่ากับ x กิโลเมตร และอัตราเร็วในการเดินเท่ากับ 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะได้

$$\text{เวลาในการเดิน} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{อัตราเร็ว}} = \frac{x}{4} \text{ ชั่วโมง}$$

เวลาที่จิราพร ใช้ในการเดินทางทั้งหมดเท่ากับ

$$\frac{\sqrt{45 - 12x + x^2}}{5} + \frac{x}{4} \text{ ชั่วโมง}$$

เนื่องจากเวลาที่ใช้ในการเดินทางเท่ากับ 1.5 ชั่วโมง ดังนั้น

$$\frac{\sqrt{45 - 12x + x^2}}{5} + \frac{x}{4} = 1.5$$

$$(20)\frac{\sqrt{45-12x+x^2}}{5}+(20)\frac{x}{4}=(20)1.5$$

$$4\sqrt{45-12x+x^2}+5x=30$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$(4\sqrt{45-12x+x^2})^2=(30-5x)^2$$

$$16(45-12x+x^2)=900-300x+25x^2$$

$$720-192x+16x^2=900-300x+25x^2$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$900-300x+25x^2-720+192x-16x^2=0$$

$$180-108x+9x^2=0$$

หรือ $x^2-12x+20=0$

$$(x-10)(x-2)=0$$

ดังนั้น $x=10$ หรือ $x=2$

เนื่องจาก $BD=6$ และ $CD=x$

ดังนั้น x ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 6 จะได้ว่า $x=2$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างบ้านของอรุณกับท่าเทียบเรือเท่ากับ 2 กิโลเมตร

1.6 สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงจำนวนจริง โดยเริ่มจากระบบจำนวนจริงซึ่งประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ จำนวนตรรกยะยังประกอบด้วยจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็มและจำนวนเต็ม และจำนวนเต็มยังประกอบด้วยจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มศูนย์ และจำนวนเต็มลบอีกด้วย เพื่อให้เกิดความเข้าใจในเรื่องจำนวนจริงมากยิ่งขึ้น ยังกล่าวถึงสมบัติ นิยาม ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนจริง ซึ่งจะได้นำมาแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการแก้สมการและอสมการในรูปแบบต่างๆ ล้วนแต่ต้องใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ผู้เรียนสามารถนำความรู้จากจำนวนจริงไปใช้ประโยชน์ต่อไปในรายวิชาอื่นๆ ได้ แม้กระทั่งในชีวิตประจำวัน เป็นต้น

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) จำนวนเต็มมีสมบัติปิดสำหรับการคูณ
   2) จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการหาร ที่ตัวหารไม่เป็นศูนย์
   3) จำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
   4) ถ้า $a,b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a+b \in \mathbb{R}$
   5) ถ้า $a,b,c \in \mathbb{R}$ แล้ว $a(b+c)=ab+ac$
   6) ถ้า $a,b,c \in \mathbb{R}$ และ a เป็นอินเวอร์สการบวกของ b แล้ว $a+b+c=c$
   7) $\{-1,0,1\}$ มีตัวผกผันสำหรับการคูณ
   8) กำหนดให้ $a,b \in \mathbb{R}$ และนิยาม $a*b=\dfrac{a+b}{2}$ แล้ว $a*b=b*a$
   9) ถ้า a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

2. กำหนด $f(x)$ และ c ดังต่อไปนี้ จงหาเศษจากการหาร $f(x)$ ด้วย $x-c$
   1) $f(x)=x^3-2x^2-x+5$, $c=2$
   2) $f(x)=x^4+2x^3-x^2+x-5$, $c=-1$
   3) $f(x)=2x^3+5x^2+3x+3$, $c=-2$

3. ถ้า $x-2$ หาร x^3+ax^2+5x+a แล้วเหลือเศษ 3 จงหา a

4. ถ้า $x-1$ และ $x+1$ หาร x^2+mx+4 เหลือเศษเท่ากันแล้ว m มีค่าเท่าไร

5. จงหาตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้
   1) $x^3-6x^2+11x-6$
   2) x^3-x^2-4x+4
   3) $3x^3-7x^2-7x+3$
   4) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6$
   5) $2x^4-15x^3+39x^2-40x+12$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $x^3-2x^2-x+2=0$

2) $x^3+2x^2-5x-6=0$

3) $2x^3+x^2-13x+6=0$

4) $6x^3+2=5x+x^2$

5) $4x^3-4x^2-11x+6=0$

7. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้วตัวผกผันการคูณของ a เป็นจำนวนจริงบวกด้วย

2) ถ้า $a,b\in\mathbb{R}$ แล้ว $a<b$ แล้ว $a-b<0$

3) กำหนดให้ $a,b,c\in\mathbb{R}$ ถ้า $a>b$ และ $b>c$ แล้ว $a>c$

4) กำหนดให้ $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ถ้า $a>b>0$ และ $c>d>0$ แล้ว $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

5) กำหนดให้ $a,b\in\mathbb{R}$ ถ้า $ab>0$ แล้ว $\frac{a}{b}>0$

6) กำหนดให้ $a,b,c\in\mathbb{R}$ ถ้า $a<b<c<0$ แล้ว $(a-d)(b-c)<0$

7) กำหนดให้ $a,b,c\in\mathbb{R}$ ถ้า $0<a<b<c$ แล้ว $(a-d)(b-c)<0$

8. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1) $(2x-3)(4x-1)\geq 0$

2) $x^2-4x+3\leq 0$

3) $6x^2\leq 15x-6$

4) $\frac{x+2}{x-3}\geq 0$

5) $x^3-x\geq x^2-1$

6) $x^3-6x^2+11x-6<0$

9. จงหาค่า x จากสมการต่อไปนี้

1) $|x-5|=5-x$

2) $|3x-1|=2x+5$

3) $|2x+5|=|x-8|$

4) $\left|x^2-x+4\right|=0$

10. จงแก้อสมการต่อไปนี้

   1) $|x-2|>3$

   2) $x-3>|x-5|$

   3) $|2x-1|\leq|x-3|$

   4) $|x-5|>5-x$

เอกสารอ้างอิง

กนก จุยคำวงศ์. (2549). **เอกสารประกอบการสอน รายวิชาทฤษฎีสมการ**. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.

กวิยา เนาวประทีป. (2556). **ระบบจำนวนจริง**. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ้นเตอร์. กรุงเทพฯ.

มานัส บุญยัง. (2529). **ทฤษฎีสมการเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

เลิศ สิทธิโกศล. (2540). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

สุขใส ไพบูลย์. (2547). **เอกสารประกอบการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับครูประถมศึกษา**. จันทบุรี. สถาบันราชภัฏรำไพพรรณี จันทบุรี.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

เนื้อหาประจำบท

บทที่ 2 ฟังก์ชันเลขยกกำลัง

2.1 เลขยกกำลัง

2.2 รากของจำนวนจริง

2.3 การหารากที่สองของจำนวนอตรรกยะบวก

2.4 การแก้สมการที่อยู่ในรูปกรณฑ์

2.5 ฟังก์ชันเลขยกกำลัง

2.6 การแก้สมการและอสมการของฟังก์ชันเลขยกกำลัง

2.7 การประยุกต์

2.8 สรุป

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อศึกษาบทที่ 2 แล้วนักศึกษาสามารถ

1. ใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้
2. หารากของจำนวนจริงได้
3. หารากที่สองของจำนวนอตรรกยะได้
4. นำสมบัติของเลขยกกำลังมาแก้สมการได้
5. บอกนิยามของฟังก์ชันเลขยกกำลังได้
6. แก้สมการของฟังก์ชันเลขยกกำลังได้
7. แก้อสมการของฟังก์ชันเลขยกกำลังได้
8. นำฟังก์ชันเลขยกกำลังไปประยุกต์ได้

กิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนอธิบายเนื้อหาและซักถาม พร้อมยกตัวอย่างประกอบการบรรยาย โดยใช้ไฟล์พาวเวอร์พอยนต์
2. ให้ผู้เรียนทำใบงานและสุ่มผู้เรียนนำเสนอขั้นตอนการหาคำตอบ
3. ให้ผู้เรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป เรื่อง ฟังก์ชันเลขยกกำลัง
4. ผู้เรียนและผู้สอนร่วมกันอภิปรายและหาข้อสรุปร่วมกัน
5. ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดบทที่ 2
6. ทดสอบย่อยหลังจบบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป
2. ไฟล์พาวเวอร์พอยนต์ เรื่อง ฟังก์ชันเลขยกกำลัง
3. ใบงาน เรื่อง ฟังก์ชันเลขยกกำลัง
4. หนังสืออ่านประกอบค้นคว้าเพิ่มเติม
5. แบบฝึกหัดบทที่ 2

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากการซักถามผู้เรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม
3. สังเกตจากความสนใจ
4. สังเกตจากการอภิปรายกลุ่มย่อยและอภิปรายสรุป
5. ประเมินจากการทำแบบฝึกหัด
6. ประเมินจากการสอบระหว่างภาคและปลายภาค

บทที่ 2

ฟังก์ชันเลขยกกำลัง

ในการศึกษาฟังก์ชันเลขยกกำลัง จะอาศัยสมบัติของเลขยกกำลัง ดังนั้นจึงต้องศึกษาเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม และขยายไปถึงเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ดังหัวข้อต่อไปนี้

2.1 เลขยกกำลัง

ในหัวนี้จะกล่าวถึง บทนิยามของเลขยกกำลัง สมบัติของเลขยกกำลัง และความรู้พื้นฐานต่างๆ ของเลขยกกำลัง เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาฟังก์ชันเลขยกกำลังต่อไป ดังหัวข้อต่อไปนี้

2.1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 1 เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ จำนวน n ตัว

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง

เรียก a ว่า ฐานของเลขยกกำลัง

เรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

ตัวอย่างที่ 1 จงบอกส่วนประกอบของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) 2^3 2) 5^4 3) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ 4) $(-8)^3$

วิธีทำ

1) 2^3 มีฐานคือ 2 มีเลขชี้กำลังคือ 3

2) 5^4 มีฐานคือ 5 มีเลขชี้กำลังคือ 4

3) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ มีฐานคือ $\dfrac{3}{2}$ มีเลขชี้กำลังคือ 2

4) $(-8)^3$ มีฐานคือ -8 มีเลขชี้กำลังคือ 3

2.1.2 สมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

จากหัวข้อที่ผ่านมาเกี่ยวกับเลขยกกำลัง และส่วนประกอบของเลขยกกำลังแล้วนั้น ถ้านำเลขยกกำลังมากระทำกันในทางคณิตศาสตร์ เช่น การคูณ การหาร เป็นต้น ซึ่งอาจใช้สมบัติของเลขยกกำลังที่จะกล่าวต่อไปนี้ช่วยในการหาค่าได้ ดังต่อไปนี้

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

   $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

   $(a^m)^n = a^{mn}$

3. ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

   $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4. ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $b \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

   $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

5. ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} 1 & ; m = n \\ a^{m-n} & ; m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & ; n > m \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณต่อไปนี้โดยเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $2^5 \cdot 2^7$ 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4$ 3) $(2.5)^3(2.5)^2$

วิธีทำ

1) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12}$

2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^6$

3) $(2.5)^3(2.5)^2 = (2.5)^{3+2} = (2.5)^5$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $(5^2)^3$ 2) $(2^2)^4$ 3) $(x^5)^2$

วิธีทำ

1) $(5^2)^3 = 5^{2\times3} = 5^6$

2) $(2^2)^4 = 2^{2\times4} = 2^8$

3) $(x^5)^2 = x^{5\times2} = x^{10}$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\left(\frac{2^2}{2^4}\right)^3$ 2) $\left(\frac{x^2y}{x}\right)^3, x \neq 0$ 3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

วิธีทำ

1) $\left(\frac{2^2}{2^4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2^{4-2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 = \frac{1^3}{(2^2)^3} = \frac{1}{2^{2\times3}} = \frac{1}{2^6}$

2) $\left(\frac{x^2y}{x}\right)^3 = (x^{2-1}y)^3 = (xy)^3 = x^3y^3$

3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{3^4}$

นอกจากนี้ถ้ามีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบและจำนวนเต็มศูนย์ จะมีสมบัติของเลขยกกำลังที่มีสมบัติบางประการเหมือนกับเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก ดังต่อไปนี้

2.1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มศูนย์และจำนวนเต็มลบ

ใช้สมบัติเหมือนกันกับเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก โดยการเปลี่ยนรูปเลขชี้กำลังให้เป็นจำนวนเต็มบวก ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2 ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ แล้ว $a^0 = 1$

หมายเหตุ ในกรณี $a = 0$ เราไม่นิยาม 0^0 ซึ่งเรียกว่า รูปแบบไม่กำหนด

บทนิยาม 3 ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

หมายเหตุ ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

เนื่องจากจำนวนเต็มแบ่งเป็น จำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มศูนย์ และจำนวนเต็มลบ ดังนั้นเราสามารถที่จะสรุปสมบัติเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ได้ดังต่อไปนี้

2.1.4 สมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจากจำนวนเต็ม ประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มศูนย์ และจำนวนเต็มลบ และจากสมบัติในหัวข้อ 2.1.2 และหัวข้อ 2.1.3 ทำให้ได้สมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ดังต่อไปนี้

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

   $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

   $(a^m)^n = a^{mn}$

3. ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

4. ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

5. ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $16^{3a+1} \times 10^{-12a-2} \times 25^{6a}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
16^{3a+1} \times 10^{-12a-2} \times 25^{6a} &= \left(2^4\right)^{3a+1} \times (2\times 5)^{-12a-2} \times \left(5^2\right)^{6a} \\
&= 2^{12a+4} \times 2^{-12a-2} \times 5^{-12a-2} \times 5^{12a} \\
&= 2^2 \times 5^{-2} \\
&= \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $16^{3a+1} \times 10^{-12a-2} \times 25^{6a} = \frac{4}{25}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\frac{5^{3x-2} \times 5^{x+7}}{5^{2x+1}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{5^{3x-2} \times 5^{x+7}}{5^{2x+1}} &= \frac{5^{3x-2+x+7}}{5^{2x+1}} \\
&= \frac{5^{4x+5}}{5^{2x+1}} \\
&= 5^{(4x+5)-(2x+1)} \\
&= 5^{2x+4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{5^{3x-2} \times 5^{x+7}}{5^{2x+1}} = 5^{2x+4}$

นอกจากนี้ ถ้าเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังเป็นเศษส่วนหรือทศนิยมหรืออยู่ในรูปรากที่ n เราสามารถที่ใช้สมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ โดยการเปลี่ยนรากที่ n ในรูปเศษส่วน ดังต่อไปนี้

2.1.4 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

เลขยกกำลังนอกจากจะมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มแล้ว ยังมีเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนด้วย ซึ่งมีนิยามและสมบัติต่อไปนี้

บทนิยาม 4 ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

โดยที่ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 5 ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ m,n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \geq 2$ แล้ว

$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{m} = (\sqrt[n]{a})^{m}$ หรือ $a^{\frac{m}{n}} = (a^{m})^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[n]{a^{m}})$

โดยที่ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง

ยกเว้น $a = 0$ และ $m = 0$ เพราะว่า 0^{0} เป็นรูปแบบไม่กำหนด

2.1.6 สมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

   $a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$

   โดยที่ a^{m} และ a^{n} เป็นจำนวนจริง

2. ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

   $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$ โดยที่ a^{m} และ a^{n} เป็นจำนวนจริง

3. ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

   $(a^{m})^{n} = a^{mn}$ โดยที่ a^{m} และ a^{n} เป็นจำนวนจริง

4. ถ้า a,b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ โดยที่ a^n และ b^n เป็นจำนวนจริง

5. ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ n เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ โดยที่ a^n และ b^n เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 7 จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $3^2 \cdot 3^{-5}$

2) $\dfrac{6^{-3}}{6^{-4}}$

3) $(4^{-7})^2$

4) $\left(\dfrac{3^5 \cdot 3^{-2}}{3^{10}}\right)^2$

5) $\left(\dfrac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10}{10^4}\right)^{-2}$

วิธีทำ

1) $3^2 \cdot 3^{-5} = 3^{2+(-5)} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{9}$

2) $\dfrac{6^{-3}}{6^{-4}} = 6^{(-3)-(-4)} = 6^{-3+4} = 6^1 = 6$

3) $(4^{-7})^2 = 4^{(-7)\cdot 2} = 4^{-14} = \dfrac{1}{4^{14}}$

4) $\left(\dfrac{3^5 \cdot 3^{-2}}{3^{10}}\right)^2 = \left(\dfrac{3^{5+(-2)}}{3^{10}}\right)^2 = \left(\dfrac{3^3}{3^{10}}\right)^2 = (3^{3-10})^2 = \dfrac{1}{3^{14}}$

5) $\left(\dfrac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10}{10^4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{10^{3+2+1}}{10^4}\right)^{-2} = (10^{6-4})^{-2} = \dfrac{1}{10^4}$

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นบวก เมื่อ a,x,y,p และ q เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์

1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$

2) $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-2}$

3) $a^{\frac{3}{4}} \div a^{-\frac{1}{4}}$

4) $\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^{2}$

5) $\left(a^{2}b^{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

6) $\left(\dfrac{p^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{1}{6}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

7) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$

วิธีทำ

1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$

2) $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-2} = x^{\frac{3}{4}-2} = x^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$

3) $a^{\frac{3}{4}} \div a^{-\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{4})} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = a$

4) $\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^{2} = y^{-\frac{3}{4}\cdot 2} = y^{-\frac{3}{2}}$

5) $(a^{2}b^{3})^{\frac{1}{6}} = a^{2\cdot\frac{1}{6}}b^{3\cdot\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

6) $\left(\dfrac{p^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{1}{6}}}\right)^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{p^{\frac{2}{3}\cdot(-\frac{3}{2})}}{q^{\frac{1}{6}\cdot(-\frac{3}{2})}} = \dfrac{p^{-1}}{q^{-\frac{1}{4}}} = \dfrac{q^{\frac{1}{4}}}{p}$

7) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{31}{36}}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ

1) $8^{\frac{1}{3}}$

2) $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

3) $(81)^{\frac{3}{4}}$

4) $(0.01)^{-\frac{1}{2}}$

5) $(343)^{\frac{1}{3}}$

วิธีทำ

1) $8^{\frac{1}{3}} = (2^{3})^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2$

2) $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{3^{3}}{2^{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{3^{3\cdot\frac{1}{3}}}{2^{6\cdot\frac{1}{3}}} = \dfrac{3}{2^{2}} = \dfrac{3}{4}$

3) $(81)^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4\cdot\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

4) $(0.01)^{-\frac{1}{2}} = (10^{-2})^{\frac{-1}{2}} = 10^{(-2)\cdot(-\frac{1}{2})} = 10$

5) $(343)^{\frac{1}{3}} = (7^3)^{\frac{1}{3}} = 7^{3\cdot\frac{1}{3}} = 7$

ตัวอย่างที่ 10 จงทำ $\left(\frac{xz^3}{y}\right)^4 \left(\frac{y^3x^2}{z}\right)^3$ เป็นรูปอย่างง่าย เมื่อ $y \neq 0$ และ $z \neq 0$

วิธีทำ $$\left(\frac{xz^3}{y}\right)^4 \left(\frac{y^3x^2}{z}\right)^3 = \left(\frac{x^4z^{3\cdot4}}{y^4}\right)\left(\frac{y^{3\cdot3}x^{2\cdot3}}{z^3}\right)$$

$$= \left(\frac{x^4z^{12}}{y^4}\right)\left(\frac{y^9x^6}{z^3}\right)$$

$$= x^{4+6}y^{9-4}z^{12-3}$$

$$= x^{10}y^5z^9$$

ดังนั้น $\left(\frac{xz^3}{y}\right)^4 \left(\frac{y^3x^2}{z}\right)^3 = x^{10}y^5z^9$

ตัวอย่างที่ 11 จงทำ $\left(\dfrac{x^{2}y^{-3}}{z^{4}}\right)^{-2}\left(\dfrac{z^{2}x^{3}}{y}\right)^{3}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

เมื่อ $x \neq 0, y \neq 0$ และ $z \neq 0$

วิธีทำ

$$\left(\dfrac{x^{2}y^{-3}}{z^{4}}\right)^{-2}\left(\dfrac{z^{2}x^{3}}{y}\right)^{3} = \left(\dfrac{x^{2\times(-2)}y^{(-3)\times(-2)}}{z^{4\times(-2)}}\right)\left(\dfrac{z^{2\times3}x^{3\times3}}{y^{3}}\right)$$

$$= \left(\dfrac{x^{-4}y^{6}}{z^{-8}}\right)\left(\dfrac{z^{6}x^{9}}{y^{3}}\right)$$

$$= x^{-4+9}y^{6-3}z^{6-(-8)}$$

$$= x^{5}y^{3}z^{14}$$

ดังนั้น $\left(\dfrac{x^{2}y^{-3}}{z^{4}}\right)^{-2}\left(\dfrac{z^{2}x^{3}}{y}\right)^{3} = x^{5}y^{3}z^{14}$

ตัวอย่างที่ 12 จงทำ $\dfrac{9x^{-2}-6x^{-1}+1}{3x^{-2}-x^{-1}}$ เป็นรูปอย่างง่าย เมื่อ $x \neq 0$

วิธีทำ

$$\dfrac{9x^{-2}-6x^{-1}+1}{3x^{-2}-x^{-1}} = \dfrac{9\frac{1}{x^{2}}-6\frac{1}{x}+1}{3\frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{x}}$$

$$= \dfrac{9\frac{1}{x^{2}}-6\frac{x}{x^{2}}+\frac{x^{2}}{x^{2}}}{3\frac{1}{x^{2}}-\frac{x}{x^{2}}}$$

$$= \frac{\frac{9-6x+x^2}{x^2}}{\frac{3-x}{x^2}}$$

$$= \frac{9-6x+x^2}{3-x}$$

$$= 3-x \qquad \text{เมื่อ } x \neq 3$$

ดังนั้น $\frac{9x^{-2}-6x^{-1}+1}{3x^{-2}-x^{-1}} = 3-x$ เมื่อ $x \neq 3$ และ $x \neq 0$

2.2 รากของจำนวนจริง

รากของจำนวนจริง มีตั้งแต่รากที่สองเป็นต้นไป และสามารถหารากของจำนวนจริงได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง แล้ว y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

เนื่องจาก $y^2 \geq 0$ เสมอ จึงทำให้ $x \geq 0$ ด้วย

ดังนั้นจะมีรากที่สองของจำนวนจริงบวกหรือศูนย์เท่านั้น จะไม่สามารถหารากที่สองของจำนวนจริงลบได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 13 จงหารากที่ 2 ของจำนวนในข้อต่อไปนี้

1) รากที่ 2 ของ 4
2) รากที่ 2 ของ 64
3) รากที่ 2 ของ $\frac{1}{9}$
4) รากที่ 2 ของ $\frac{25}{4}$
5) รากที่ 2 ของ 5
6) รากที่ 2 ของ 7

วิธีทำ

1) รากที่ 2 ของ 4 คือ $2,-2$ เพราะว่า $2^2 = 4$ และ $(-2)^2 = 4$

2) รากที่ 2 ของ 64 คือ $8,-8$ เพราะว่า $8^2 = 64$ และ $(-8)^2 = 64$

3) รากที่ 2 ของ $\frac{1}{9}$ คือ $\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$ เพราะว่า $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ และ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

4) รากที่ 2 ของ $\frac{25}{4}$ คือ $\frac{5}{2},-\frac{5}{2}$ เพราะว่า $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ และ $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

5) รากที่ 2 ของ 5 คือ $\sqrt{5},-\sqrt{5}$ เพราะว่า $(\sqrt{5})^2 = 5$ และ $(-\sqrt{5})^2 = 5$

6) รากที่ 2 ของ 7 คือ $\sqrt{7},-\sqrt{7}$ เพราะว่า $(\sqrt{7})^2 = 7$ และ $(-\sqrt{7})^2 = 7$

2.2.1 รากที่ n ของจำนวนจริง

นอกจากการหารากที่สองของจำนวนจริงแล้วนั้น ยังสามารถที่จะขยายการหารากในกรณีทั่วไปได้ด้วย ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 7 ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 จะได้ว่า y เป็นรากที่ n ของ x โดยที่ $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 14 จงหารากของจำนวนต่อไปนี้

1) รากที่ 3 ของ 8
2) รากที่ 4 ของ 4
3) รากที่ 5 ของ -32
4) รากที่ 4 ของ $\frac{81}{16}$
5) รากที่ 3 ของ -64
6) รากที่ 5 ของ 32
7) รากที่ 4 ของ 9

วิธีทำ

1) รากที่ 3 ของ 8 คือ 2 เพราะว่า $2^3 = 8$
2) รากที่ 4 ของ 4 คือ $\sqrt[4]{4}, -\sqrt[4]{4}$ เพราะว่า $(\sqrt[4]{4})^4 = 4$ และ $(-\sqrt[4]{4})^4 = 4$
3) รากที่ 5 ของ -32 คือ -2 เพราะว่า $(-2)^5 = -32$
4) รากที่ 4 ของ $\frac{81}{16}$ คือ $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ เพราะว่า $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ และ $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$
5) รากที่ 3 ของ -64 คือ -4 เพราะว่า $(-4)^3 = -64$
6) รากที่ 5 ของ 32 คือ 2 เพราะว่า $2^5 = 32$
7) รากที่ 4 ของ 9 คือ $\sqrt[4]{9}, -\sqrt[4]{9}$ เพราะว่า $(\sqrt[4]{9})^4 = 9$ และ $(-\sqrt[4]{9})^4 = 9$

2.2.2 ค่าหลักของรากที่ n

บทนิยาม 8 ให้ x เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n จะกล่าวว่า จำนวนจริง y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1. y เป็นรากที่ n ของ x
2. $yx > 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$

หมายเหตุ

1. สัญลักษณ์ $\sqrt[n]{\ }$ เรียกว่า เครื่องหมายกรณฑ์ และเรียก n ว่าอันดับที่ของกรณฑ์ เช่น

   $\sqrt[3]{6}$ เป็นกรณฑ์ที่ 3 ของ 6

   $\sqrt[4]{11}$ เป็นกรณฑ์ที่ 4 ของ 11

   $\sqrt[5]{12}$ เป็นกรณฑ์ที่ 5 ของ 12

2. $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ x
3. กรณฑ์ที่ 2 ของ x คือ $\sqrt[2]{x}$ จะเขียนแทนด้วย $\sqrt{x}$

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่าหลักของรากที่ ต่อไปนี้

1) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16
2) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -125
3) ค่าหลักของรากที่ 5 ของ -20
4) ค่าหลักของรากที่ 8 ของ -64

วิธีทำ

1) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16 คือ 2
2) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -125 คือ -5
3) ค่าหลักของรากที่ 5 ของ -20 คือ $\sqrt[5]{-20}$
4) ไม่มีค่าหลักของรากที่ 8 ของ -64 ในระบบจำนวนจริง

2.2.3 สมบัติของรากที่ n

1. ถ้า $a \geq 0$ และ $b \geq 0$ แล้ว $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2. ถ้า $a \geq 0$ และ $b > 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

3. ถ้า a และ b มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

4. ถ้า a และ b มีรากที่ n และ $b \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

5. ถ้า $a \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ แล้ว $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

6. ถ้า $a \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbf{I}^+$ โดยที่ $n \geq 2$ แล้ว

   $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

   $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

7. ถ้า $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ และ $m \geq 2$ ที่ทำให้ รากที่ m ของ $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$

   แล้ว $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

8. ถ้า $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbf{I}^+$ และ $n > 1$ และ a มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

9. ให้ $a \in \mathbb{R}, m \in \mathbf{I}, n \in \mathbf{I}$ โดยที่ $(m,n) = 1$ และ $a^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$ โดยเมื่อ $m > 0$

   และ a ไม่เป็นศูนย์ แล้ว $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่าต่อไปนี้

1) $\sqrt{48}$ 2) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ 3) $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3$

4) $\left(\sqrt[7]{-2}\right)^7$ 5) $\sqrt[3]{4^3}$

วิธีทำ

1) $\sqrt{48}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

2) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

3) $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3=12$

4) $\left(\sqrt[7]{-2}\right)^7=-2$

5) $\sqrt[3]{4^3}=4$

2.2.4 การหาผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

กรณฑ์ของจำนวนเดียวกันและมีอันดับที่ของกรณฑ์เท่ากัน สามารถนำมาบวก ลบกันได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงของจำนวนจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 17 จงหาผลสำเร็จของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

2) $7\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

3) $\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}$

4) $2\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

5) $(\sqrt{27}-2\sqrt{2})+(3\sqrt{12}+3\sqrt{8})$

6) $(\sqrt{243}+5\sqrt{28})-(2\sqrt{7}-3\sqrt{27})$

วิธีทำ

1) $2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(2+5)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

2) $7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(7-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

3) $\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=(1+3-2)\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

4) $2\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$=2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$=(2+\frac{2}{3})\sqrt{3}$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{3}$$

5) $(\sqrt{27}-2\sqrt{2})+(3\sqrt{12}+3\sqrt{8})$

$$=(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})+(6\sqrt{3}+6\sqrt{2})$$

$$=(3\sqrt{3}+6\sqrt{3})+(6\sqrt{2}-2\sqrt{2})$$

$$=(3+6)\sqrt{3}+(6-2)\sqrt{2}$$

$$=9\sqrt{3}+4\sqrt{2}$$

6) $(\sqrt{243}+5\sqrt{28})-(2\sqrt{7}-3\sqrt{27})$

$$=(9\sqrt{3}+10\sqrt{7})-(2\sqrt{7}-9\sqrt{3})$$

$$=9\sqrt{3}+10\sqrt{7}-2\sqrt{7}+9\sqrt{3}$$

$$=(9\sqrt{3}+9\sqrt{3})+(10\sqrt{7}-2\sqrt{7})$$

$$=(9+9)\sqrt{3}+(10-2)\sqrt{7}$$

$$=18\sqrt{3}+8\sqrt{7}$$

2.2.5 การหาผลคูณและผลหารของกรณฑ์

ในการหาผลคูณและผลหารของกรณฑ์ ถ้าอันดับที่ของกรณฑ์ไม่เท่ากันต้องทำให้อันดับที่ของกรณฑ์เท่ากันเสียก่อน หลังจากนั้นจึงนำมาคูณหรือหารกันได้ แต่ถ้าอันดับที่ของกรณฑ์ไม่เท่ากันไม่สามารถนำมาคูณหรือหารกันได้

ตัวอย่างที่ 18 จงหาผลสำเร็จของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$

2) $3\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{27})$

3) $3\sqrt{2}(2\sqrt{3}-3\sqrt{8})$

4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$

5) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

6) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$

7) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{2}}$

8) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{12}}$

9) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

10) $(3\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32})^2$

11) $\dfrac{\sqrt{81}+\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[4]{625}}$

12) $\dfrac{(2^3)^2}{(-27)^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt[4]{(-2)^4}}$

วิธีทำ

1) $$\begin{aligned}\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} &= \sqrt{2\cdot 8}\\ &= \sqrt{16}\\ &= 4\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}3\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{27}) &= (3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})+(3\sqrt{3}\cdot\sqrt{27})\\ &= 3\sqrt{9}+\left(3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\right)\\ &= 3\sqrt{9}+9\sqrt{9}\\ &= 36\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}3\sqrt{2}(2\sqrt{3}-3\sqrt{8}) &= (3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3})-(3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{8})\\ &= 6\sqrt{6}-9\sqrt{16}\\ &= 6\sqrt{6}-9\cdot 4\\ &= 6\sqrt{6}-36\end{aligned}$$

4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$

เนื่องจาก อันดับที่ของกรณฑ์ไม่เท่ากันจึงคูณกันไม่ได้

5) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{27}{3}}$

$=\sqrt{9}$

$=3$

6) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\dfrac{64}{2}}$

$=\sqrt[5]{32}$

$=2$

7) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}$

8) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{96}\cdot\sqrt{125}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}}$

$=\sqrt{\dfrac{125}{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{96}{12}}$

$=\sqrt{25}\cdot\sqrt{8}$

$=5\cdot 2\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}$

9) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})=4\sqrt{6}-6\sqrt{9}+2\sqrt{4}-3\sqrt{6}$

$=(4\sqrt{6}-3\sqrt{6})-6\cdot 3+2\cdot 2$

$$=\sqrt{6}-18+4$$

$$=\sqrt{6}-14$$

10) $(3\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32})^2=(3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2})^2$

$$=((3+2-4)\sqrt{2})^2$$

$$=(\sqrt{2})^2$$

$$=2$$

11) $\dfrac{\sqrt{81}+\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[4]{625}}=\dfrac{\sqrt{9^2}+\sqrt[3]{(-4)^3}}{\sqrt[4]{5^4}}$

$$=\frac{9+(-4)}{5}$$

$$=1$$

12) $\dfrac{(2^3)^2}{(-27)^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt[4]{(-2)^4}}=\dfrac{2^6}{((-3)^3)^{\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{9}{|-2|}$

$$=\frac{2^6}{-3}\cdot\frac{9}{2}$$

$$=-2^5\cdot 3$$

$$=-96$$

ต่อไปนี้ จะกล่าวถึง สังยุคของจำนวนจริงเพื่อทำให้เศษส่วนไม่อยู่ในรูปของกรณฑ์ หรือเพื่อทำให้ง่ายต่อการหาค่าของกรณฑ์

บทนิยาม 9 กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. สังยุคของ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ คือ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$
2. สังยุคของ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ คือ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

เช่น สังยุคของ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ คือ $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

สังยุคของ $-5+\sqrt{5}$ คือ $-5-\sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่าของ $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ โดยทำให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปของกรณฑ์

วิธีทำ
$$\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{6\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{6\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{5-3}$$
$$=\frac{6\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{2}$$
$$=3\sqrt{5}-3\sqrt{3}$$

ดังนั้น $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=3\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่าของ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ โดยทำให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปของกรณฑ์

วิธีทำ
$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{14}-\sqrt{10}-\sqrt{4}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{14}-\sqrt{10}-2}{5-2}$$
$$=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{14}-\sqrt{10}-2}{3}$$

ดังนั้น $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{14}-\sqrt{10}-2}{3}$

ตัวอย่างที่ 21 จงหาค่าของ $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{7}+5\sqrt{5}}$ โดยทำให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปของกรณฑ์

วิธีทำ

$$\frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{7}+5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{7}+5\sqrt{5}}\cdot\frac{3\sqrt{7}-5\sqrt{5}}{3\sqrt{7}-5\sqrt{5}}$$

$$=\frac{6\sqrt{49}-10\sqrt{35}+9\sqrt{35}-15\sqrt{25}}{(3\sqrt{7})^2-(5\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{6\cdot 7-\sqrt{35}-15\cdot 5}{63-125}$$

$$=\frac{-33-\sqrt{35}}{-62}$$

$$=\frac{33+\sqrt{35}}{62}$$

ดังนั้น $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{7}+5\sqrt{5}}=\dfrac{33+\sqrt{35}}{62}$

ตัวอย่างที่ 22 จงหาค่าของ $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}$ โดยทำให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปของกรณฑ์

วิธีทำ

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}+\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2}+\frac{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-1}$$

$$=7+3\sqrt{5}+\frac{7+3\sqrt{5}}{4}$$

$$=(7+3\sqrt{5})(1+\frac{1}{4})$$

$$=\frac{5(7+3\sqrt{5})}{4}$$

ดังนั้น $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{5(7+3\sqrt{5})}{4}$

2.3 การหารากที่สองของจำนวนอตรรกยะบวก

การหารากที่สองของจำนวนอตรรกยะบวก ทำได้โดยจัดจำนวนที่ต้องการหารากที่สองให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2$$

$$=a+2\sqrt{ab}+b$$

$$=a+b+2\sqrt{ab}$$

และ

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2$$

$$=a-2\sqrt{ab}+b$$

$$=a+b-2\sqrt{ab}$$

สรุป การหารากที่สองของจำนวนอตรรกยะบวก ได้ดังนี้

การหารากที่สองของจำนวนที่อยู่ในรูป $x\pm 2\sqrt{y}$

ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $x=a+b$ และ $y=ab$ แล้ว

1. รากที่สองของ $x+2\sqrt{y}$ คือ $\pm(\sqrt{a}+\sqrt{b})$
2. รากที่สองของ $x-2\sqrt{y}$ คือ $\pm(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
3. $\sqrt{x+2\sqrt{y}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
4. $\sqrt{x-2\sqrt{y}}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|=\begin{cases}\sqrt{a}-\sqrt{b} & ;\ a>b\\ \sqrt{b}-\sqrt{a} & ;\ b>a\end{cases}$

ตัวอย่างที่ 23 จงหารากที่สองของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $11+2\sqrt{24}$
2) $13-2\sqrt{42}$
3) $15-4\sqrt{14}$
4) $13+\sqrt{88}$

วิธีทำ

1) $11+2\sqrt{24}$

จะได้ $a=8$ และ $b=3$

ที่ทำให้ $11=8+3$ และ $24=8\cdot 3$

ดังนั้น รากที่สองของ $11+2\sqrt{24}$ คือ $\pm(\sqrt{8}+\sqrt{3})$

2) $13-2\sqrt{42}$

จะได้ $a=7$ และ $b=6$

ที่ทำให้ $13=7+6$ และ $42=7\cdot 6$

ดังนั้น รากที่สองของ $13-2\sqrt{42}$ คือ $\pm(\sqrt{7}-\sqrt{6})$

3) $15-4\sqrt{14}$

จัดรูปใหม่ $15-2\cdot 2\sqrt{14}=15-2\sqrt{4\cdot 14}=15-2\sqrt{56}$

จะได้ $a=8$ และ $b=7$

ที่ทำให้ $15=8+7$ และ $56=8\cdot 7$

ดังนั้น รากที่สองของ $15-4\sqrt{14}$ คือ $\pm(\sqrt{8}-\sqrt{7})$

4) $13+\sqrt{88}$

จัดรูปใหม่ $13+\sqrt{88}=13+\sqrt{4\cdot 22}=13+2\sqrt{22}$

จะได้ $a=11$ และ $b=2$

ที่ทำให้ $13=11+2$ และ $22=11\cdot 2$

ดังนั้น รากที่สองของ $13+\sqrt{88}$ คือ $\pm(\sqrt{11}+\sqrt{2})$

ตัวอย่างที่ 24 จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

1) $5-\sqrt{21}$

2) $\sqrt{125}-\sqrt{105}$

3) $\sqrt{32}-\sqrt{24}$

วิธีทำ

1) $5-\sqrt{21}$

จัดรูปใหม่ $5-\sqrt{21}=5-\frac{2}{2}\sqrt{21}=5-2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 21}=5-2\sqrt{\frac{21}{4}}$

จะได้ $a=\frac{7}{2}$ และ $b=\frac{3}{2}$

ที่ทำให้ $5=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}$ และ $\frac{21}{4}=\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}$

ดังนั้น รากที่สองของ $5-\sqrt{21}$ คือ $\pm(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}})$

2) $\sqrt{125}-\sqrt{105}$

จัดรูปใหม่ $\sqrt{125}-\sqrt{105}=5\sqrt{5}-\frac{2}{2}\sqrt{105}=5\sqrt{5}-2\sqrt{\frac{105}{4}}$

จะได้ $a=\frac{7\sqrt{5}}{2}$ และ $b=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

ที่ทำให้ $5\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{105}{4}=\frac{7\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น รากที่สองของ $\sqrt{125}-\sqrt{105}$ คือ $\pm(\sqrt{\frac{7\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{2}})$

3) $\sqrt{32}-\sqrt{24}$

จัดรูปใหม่ $\sqrt{32}-\sqrt{24}=4\sqrt{2}-\sqrt{4\cdot 6}=4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

จะได้ $a=3\sqrt{2}$ และ $b=\sqrt{2}$

ที่ทำให้ $4\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ และ $6=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

ดังนั้น รากที่สองของ $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ คือ $\pm(\sqrt{3\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{2}})$

ตัวอย่างที่ 25 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวก จงหารากที่สองของ $7x+8y-4\sqrt{14xy}$

วิธีทำ จาก $7x+8y-4\sqrt{14xy}$

จัดรูปใหม่ $7x+8y-4\sqrt{14xy}=(7x+8y)-2\sqrt{56xy}$

จะได้ $a=7x$ และ $b=8y$

ที่ทำให้ $7x+8y=7x+8y$ และ $56=7x\cdot 8y$

ดังนั้น รากที่สองของ $7a+8b-4\sqrt{14ab}$ คือ $\pm(\sqrt{7x}-\sqrt{8y})$

ตัวอย่างที่ 26 ถ้า m และ n เป็นจำนวนจริงบวก จงหารากที่สองของ $4m-2\sqrt{4m^2-9n^2}$

วิธีทำ จาก $4m-2\sqrt{4m^2-9n^2}$

จะได้ $a=2m+3n$ และ $b=2m-3n$

ที่ทำให้ $4m=(2m+3n)+(2m-3n)$

และ $4m^2-9n^2=(2m+3n)(2m-3n)$

ดังนั้น รากที่สองของ $4m-2\sqrt{4m^2-9n^2}$

คือ $\pm(\sqrt{(2m+3n)}-\sqrt{(2m-3n)})$

ตัวอย่างที่ 27 ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก จงหารากที่สองของ $3x-2-2\sqrt{2x^2+x-15}$

วิธีทำ จาก $3x-2-2\sqrt{2x^2+x-15}$

จะได้ $a=2x-5$ และ $b=x+3$

ที่ทำให้ $3x-2=(2x-5)+(x+3)$

และ $2x^2+x-15=(2x-5)(x+3)$

ดังนั้น รากที่สองของ $3x-2-2\sqrt{2x^2+x-15}$

คือ $\pm(\sqrt{(2x-5)}-\sqrt{(x+3)})$

ตัวอย่างที่ 28 จงหาผลสำเร็จในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sqrt{13+2\sqrt{40}}$

2) $\sqrt{22-2\sqrt{72}}$

3) $\sqrt{33+12\sqrt{7}}$

4) $\sqrt{27}+\sqrt{8}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{28-6\sqrt{3}}$

5) $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

วิธีทำ

1) $\sqrt{13+2\sqrt{40}}$

จะได้ $a=8$ และ $b=5$

ที่ทำให้ $13=8+5$ และ $40=8\cdot 5$

ดังนั้น $\sqrt{13+2\sqrt{40}}=\sqrt{8}+\sqrt{5}$

2) $\sqrt{22-2\sqrt{72}}$

จะได้ $a=18$ และ $b=4$

ที่ทำให้ $22=18+4$ และ $72=18\cdot 4$

ดังนั้น $\sqrt{22-2\sqrt{72}}=\sqrt{18}-\sqrt{4}=3\sqrt{2}-2$

3) $\sqrt{33+12\sqrt{7}}$

จัดรูปใหม่ $\sqrt{33+12\sqrt{7}}=\sqrt{33+2\sqrt{252}}$

จะได้ $a=21$ และ $b=12$

ที่ทำให้ $33=21+12$ และ $252=21\cdot 12$

ดังนั้น $\sqrt{33+12\sqrt{7}}=\sqrt{21}+\sqrt{12}=\sqrt{21}+2\sqrt{3}$

4) $\sqrt{27}+\sqrt{8}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{28-6\sqrt{3}}$

พิจารณา $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

จัดรูปใหม่ $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}$

จะได้ $a=9$ และ $b=8$

ที่ทำให้ $17=9+8$ และ $72=9\cdot 8$

ดังนั้น $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{9}-\sqrt{8}=3-\sqrt{8}$

และพิจารณา $\sqrt{28-6\sqrt{3}}$

จัดรูปใหม่ $\sqrt{28-6\sqrt{3}}=\sqrt{28-2\sqrt{27}}$

จะได้ $a=27$ และ $b=1$

ที่ทำให้ $28=27+1$ และ $27=27\cdot 1$

ดังนั้น $\sqrt{28-6\sqrt{3}}=\sqrt{27}-1$

จะได้ $\sqrt{27}+\sqrt{8}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{28-6\sqrt{3}}$

$=\sqrt{27}+\sqrt{8}+(3-\sqrt{8})-(\sqrt{27}-1)$

$=\sqrt{27}+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}-\sqrt{27}+1$

$=4$

นั่นคือ $\sqrt{27}+\sqrt{8}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{28-6\sqrt{3}}=4$

5) $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

(ทำเป็นแบบฝึกหัด)

2.4 การแก้สมการที่อยู่ในรูปกรณฑ์

การแก้สมการในรูปกรณฑ์สามารถทำได้โดยการกำจัดเครื่องหมายกรณฑ์ โดยใช้การยกกำลังเพื่อให้เครื่องหมายกรณฑ์หายไป และแก้สมการหาคำตอบ แต่คำตอบที่ได้จะต้องตรวจสอบเสมอ

ตัวอย่างที่ 29 จงแก้สมการ $\sqrt{2x+3}=3$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{2x+3}=3$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $(\sqrt{2x+3})^2=3^2$

$$2x+3=9$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

ตรวจสอบ แทน $x=3$ ใน $\sqrt{2x+3}=3$

จะได้ $\sqrt{2(3)+3}=3$

$$\sqrt{9}=3$$

$3=3$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=3$

ตัวอย่างที่ 30 จงแก้สมการ $\sqrt{x+9}+11=x$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x+9}+11=x$

จัดรูปใหม่ $\sqrt{x+9}=x-11$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $(\sqrt{x+9})^2=(x-11)^2$

$$x+9=x^2-22x+121$$

$$x^2-23x+112=0$$

$$(x-16)(x-7)=0$$

$$x=7,16$$

ตรวจสอบ แทน $x=7$ ใน $\sqrt{x+9}+11=x$

จะได้ $\sqrt{7+9}+11=7$

$$4+11=7$$

$15=7$ เป็นเท็จ

ตรวจสอบ แทน $x = 16$ ใน $\sqrt{x+9}+11 = x$

จะได้ $\sqrt{16+9}+11 = 16$

$5+11 = 16$

$16 = 16$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x = 16$

ตัวอย่างที่ 31 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt[3]{x^3+8}-x = 2$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt[3]{x^3+8}-x = 2$

จัดรูปใหม่ $\sqrt[3]{x^3+8} = x+2$

ยกกำลังสามทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt[3]{x^3+8})^3 = (x+2)^3$

$x^3+8 = x^3+6x^2+12x+8$

$6x^2+12x = 0$

$6x(x-2) = 0$

$x = 0,2$

ตรวจสอบ แทน $x = 0$ ใน $\sqrt[3]{x^3+8}-x = 2$

จะได้ $\sqrt[3]{0^3+8}-0 = 2$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$2 = 2$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x = 2$ ใน $\sqrt[3]{2^3+8}-2 = 2$

จะได้ $\sqrt[3]{16}-2 = 2$

$\sqrt[3]{16} = 4$ เป็นเท็จ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{0\}$

ตัวอย่างที่ 32 เซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x-8}-\sqrt{x-1}=-1$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x-8}-\sqrt{x-1}=-1$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{x-8}-\sqrt{x-1})^2=(-1)^2$

$$(x-8)-2\sqrt{(x-8)(x-1)}+(x-1)=1$$

$$-2\sqrt{(x-8)(x-1)}=-2x+10$$

$$\sqrt{(x-8)(x-1)}=x-5$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{(x-8)(x-1)})^2=(x-5)^2$

$$x^2-9x+8=x^2-10x+25$$

$$x=17$$

ตรวจสอบ แทน $x=17$ ใน $\sqrt{x-8}-\sqrt{x-1}=-1$

จะได้ $\sqrt{17-8}-\sqrt{17-1}=-1$

$$\sqrt{9}-\sqrt{16}=-1$$

$$3-4=-1$$

$-1=-1$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{17\}$

ตัวอย่างที่ 33 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=7$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=7$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{x+7}+\sqrt{x})^2=7^2$

$$(x+7)+2\sqrt{x^2+7x}+x=49$$

$$2\sqrt{x^2+7x}=-2x+42$$

$$\sqrt{x^2+7x}=21-x$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{x^2+7x})^2=(21-x)^2$

$$x^2+7x=441-42x+x^2$$

$$49x = 441$$

$$x = 9$$

ตรวจสอบ แทน $x = 9$ ใน $\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$

จะได้ $\sqrt{9+7} + \sqrt{9} = 7$

$$4 + 3 = 7$$

$7 = 7$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{7\}$

ตัวอย่างที่ 34 จงแก้สมการ $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

วิธีทำ จากสมการ $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{6x+13})^2$

$$(x+7) + 2\sqrt{x^2+9x+14} + (x+2) = 6x+13$$

$$2\sqrt{x^2+9x+14} = 4x+4$$

$$\sqrt{x^2+9x+14} = 2x+2$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{x^2+9x+14})^2 = (2x+2)^2$

$$x^2+9x+14 = 4x^2+8x+4$$

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

$$(3x+5)(x-2) = 0$$

$$x = -\frac{5}{3}, 2$$

ตรวจสอบ แทน $x = -\frac{5}{3}$ ใน $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

จะได้ $\sqrt{-\frac{5}{3}+7} + \sqrt{-\frac{5}{3}+2} = \sqrt{6\cdot(-\frac{5}{3})+13}$

$$\sqrt{\frac{16}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}} \text{ เป็นเท็จ}$$

ตรวจสอบ แทน $x=2$ ใน $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$

จะได้ $\sqrt{2+7}+\sqrt{2+2}=\sqrt{6\cdot 2+13}$

$$\sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{25}$$

$$3+2=5$$

$$5=5 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=2$

ตัวอย่างที่ 35 เซตคำตอบของสมการ $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-7}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-7}}=2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากสมการ $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-7}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-7}}=2$

จัดรูปใหม่ $\sqrt{1+x}+\sqrt{x-7}=2(\sqrt{1+x}-\sqrt{x-7})$

$$3\sqrt{x-7}=\sqrt{1+x}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(3\sqrt{x-7})^2=(\sqrt{1+x})^2$

$$9(x-7)=1+x$$

$$8x=64$$

$$x=8$$

ตรวจสอบ แทน $x=8$ ใน $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-7}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-7}}=2$

จะได้ $\dfrac{\sqrt{1+8}+\sqrt{8-7}}{\sqrt{1+8}-\sqrt{8-7}}=2$

$$\frac{3+1}{3-1}=2$$

$$2=2 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{8\}$

ตัวอย่างที่ 36 จงแก้สมการ $\dfrac{6\sqrt{x}-11}{3\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

วิธีทำ จากสมการ $\dfrac{6\sqrt{x}-11}{3\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

จัดรูปใหม่ $(6\sqrt{x}-11)(\sqrt{x}+6)=(2\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x})$

$$6x+25\sqrt{x}-66=6x+3\sqrt{x}$$

$$22\sqrt{x}=66$$

$$\sqrt{x}=3$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{x})^2=3^2$

$$x=9$$

ตรวจสอบ แทน $x=9$ ใน $\dfrac{6\sqrt{x}-11}{3\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

จะได้ $\dfrac{6\sqrt{9}-11}{3\sqrt{9}}=\dfrac{2\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}+6}$

$$\frac{18-11}{9}=\frac{6+1}{3+6}$$

$\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{9}$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{9\}$

ตัวอย่างที่ 37 จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^2+6\sqrt{x^2-2x+5}=11+2x$

วิธีทำ กำหนดให้ $a=\sqrt{x^2-2x+5}$ __________(1)

$$a^2=x^2-2x+5$$

$$x^2+6\sqrt{x^2-2x+5}=11+2x$$

จัดรูปใหม่ $x^2-2x+5+6\sqrt{x^2-2x+5}-16=0$

จัดรูปให้อยู่ในเทอมของ a จะได้ $a^2+6a-16=0$

$$(a+8)(a-2)=0$$

$$a=-8,2$$

เนื่องจาก $a=\sqrt{x^2-2x+5}$ ซึ่งมากกว่า 0

เพราะฉะนั้น $a=-8$ เป็นเท็จ

แทน $a=2$ ในสมการ (1)

จะได้ $\sqrt{x^2-2x+5}=2$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ $(\sqrt{x^2-2x+5})^2=2^2$

$$x^2-2x+5=4$$

$$x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)(x-1)=0$$

$$x=1$$

ตรวจสอบ แทน $x=1$ ใน $x^2+6\sqrt{x^2-2x+5}=11+2x$

จะได้ $1^2+6\sqrt{1^2-2(1)+5}=11+2(1)$

$$1+6\sqrt{4}=13$$

$13=13$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{1\}$

ตัวอย่างที่ 38 จงหาเซตคำตอบของสมการ $x-7x^{\frac{1}{2}}+12=0$

วิธีทำ กำหนดให้ $a=x^{\frac{1}{2}}$ ______________(1)

จะได้ $a^2=x$

จากสมการ $x-7x^{\frac{1}{2}}+12=0$

จัดรูปในเทอมของ a จะได้ $a^2-7a+12=0$

$(a-4)(a-3)=0$

$a=4,3$

แทน $a=4$ ในสมการ (1)

จะได้ $x^{\frac{1}{2}}=4$

$x=16$

และแทน $a=3$ ในสมการ (1)

จะได้ $x^{\frac{1}{2}}=3$

$x=9$

นั่นคือ $x=9, 16$

ตรวจสอบ แทน $x=9$ ใน $x-7x^{\frac{1}{2}}+12=0$

จะได้ $9-7\cdot(9)^{\frac{1}{2}}+12=0$

$9-21+12=0$

$0=0$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x=16$ ใน $x-7x^{\frac{1}{2}}+12=0$

จะได้ $16-7\cdot(16)^{\frac{1}{2}}+12=0$

$16-28+12=0$

$0=0$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{9,16\}$

ตัวอย่างที่ 39 เซตคำตอบของสมการ $x+7x^{\frac{1}{2}}-18=0$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้ $a=x^{\frac{1}{2}}$ __________(1)

จะได้ $a^2=x$

จากสมการ $x+7x^{\frac{1}{2}}-18=0$

จัดรูปในเทอมของ a จะได้ $a^2+7a-18=0$

$$(a+9)(a-2)=0$$

$$a=-9,2$$

เนื่องจาก $a=x^{\frac{1}{2}}$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0

ดังนั้น $a=-9$ เป็นเท็จ

แทน $a=2$ ในสมการ (1) จะได้ $x^{\frac{1}{2}}=2$

$$x=4$$

ตรวจสอบ แทน $x=4$ ใน $x+7x^{\frac{1}{2}}-18=0$

จะได้ $4+7(4)^{\frac{1}{2}}-18=0$

$$4+14-18=0$$

$0=0$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{4\}$

ตัวอย่างที่ 40 จงแก้สมการ $x^{\frac{3}{2}}-21x^{\frac{1}{2}}=27-7x$

วิธีทำ กำหนดให้ $a=x^{\frac{1}{2}}$ __________(1)

จะได้ $a^2 = x$ และ $a^3 = x^{\frac{3}{2}}$

จากสมการ $x^{\frac{3}{2}} - 21x^{\frac{1}{2}} = 27 - 7x$

จัดรูปใหม่ $x^{\frac{3}{2}} + 7x - 21x^{\frac{1}{2}} - 27 = 0$

จัดรูปในเทอมของ a จะได้ $a^3 + 7a^2 + 21a - 27 = 0$

$$(a+9)(a-3)(a+1) = 0$$

$$a = -9, 3, -1$$

เนื่องจาก $a = x^{\frac{1}{2}}$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0

ดังนั้น $a = -9, -1$ เป็นเท็จ

แทน $a = 3$ ในสมการ (1) จะได้ $x^{\frac{1}{2}} = 3$

$$x = 9$$

ตรวจสอบ แทน $x = 9$ ใน $x^{\frac{3}{2}} - 21x^{\frac{1}{2}} = 27 - 7x$

จะได้ $(9)^{\frac{3}{2}} - 21(9)^{\frac{1}{2}} = 27 - 7(9)$

$$27 - 63 = 27 - 63$$

$0 = 0$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{9\}$

2.5 ฟังก์ชันเลขยกกำลัง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีสมการเป็น $y = a^x$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว จะได้ว่าสมาชิกในโดเมนของ f จะเป็นจำนวนจริง และสมาชิกในเรนจ์ของ f จะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ ในกรณีนี้จะเรียก f ว่า ฟังก์ชันเลขยกกำลัง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 10 กำหนด $a>1$ และ $a\neq 1$ และ $x\in\mathbb{R}$ และ $y\in\mathbb{R}^{+}$ จะได้ว่า $y=a^{x}$

นั่นคือ ฟังก์ชันเลขยกกำลัง คือ $f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+}\,\middle|\, y=a^{x},\ a>0,\ a\neq 1\right\}$

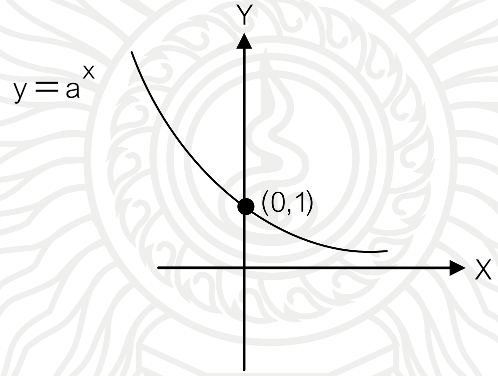
จากเงื่อนไขที่ว่า $a>1$ และ $a\neq 1$ จะทำให้ค่า a แบ่งเป็น 2 ช่วงคือ

1) $0<a<1$

ฟังก์ชันเลขยกกำลัง ซึ่งมี $0<a<1$ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก x_1 เป็น x_2 ดังนี้ ถ้า $x_1<x_2$ แล้วจะได้ $y_1>y_2$

ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ของฟังก์ชันเลขยกกำลัง ซึ่ง $0<a<1$ มีลักษณะกราฟดังนี้

กำหนดให้ $y=a^{x}$ เมื่อ $0<a<1$



ภาพที่ 2.1 แสดงกราฟของฟังก์ชันเลขยกกำลัง เมื่อ $0<a<1$

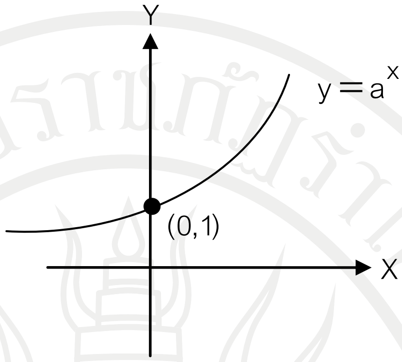
จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y มีลักษณะเป็นฟังก์ชันลด คือ เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ทำให้ค่าของ y ลดลง หรือเมื่อค่าของ x ลดลง ทำให้ค่าของ y เพิ่มขึ้น

2) $a>1$

ฟังก์ชันเลขยกกำลัง ซึ่งมี $a>1$ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก x_1 เป็น x_2 ดังนี้ ถ้า $x_1<x_2$ แล้วจะได้ $y_1<y_2$

ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ของฟังก์ชันเลขยกกำลัง ซึ่ง $a>1$ มีลักษณะกราฟดังนี้

กำหนดให้ $y = a^x$ เมื่อ $a > 1$



ภาพที่ 2.2 แสดงกราฟของฟังก์ชันเลขยกกำลัง เมื่อ $a > 1$

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y มีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ทำให้ค่าของ y เพิ่มขึ้น หรือเมื่อค่าของ x ลดลง ทำให้ค่าของ y ลดลง

ตัวอย่างที่ 41 จงบอกว่าฟังก์ชันเลขยกกำลังต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

1) $y = 3^x$
2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
3) $y = 0.5^x$
4) $y = (2.3)^x$
5) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$
6) $y = (0.003)^x$
7) $y = (\sqrt{15})^x$

วิธีทำ

1) $y = 3^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด
3) $y = 0.5^x$ เป็นฟังก์ชันลด

4) $y = (2.3)^{x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

5) $y = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

6) $y = (0.003)^{x}$ เป็นฟังก์ชันลด

7) $y = (\sqrt{15})^{x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

2.6 การแก้สมการและอสมการของฟังก์ชันเลขยกกำลัง

สมการเลขยกกำลัง คือ สมการซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นตัวแปรโดยที่ฐานเป็นค่าคงตัว การแก้สมการเลขยกกำลัง สามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 การทำให้ฐานของเลขยกกำลังมีค่าเท่ากัน มีหลักการดังนี้

1. จัดให้ฐานของเลขยกกำลังมีค่าเท่ากัน
2. นำเลขชี้กำลังมาสร้างเป็นสมการ
3. แก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ
4. ตรวจสอบคำตอบ

วิธีที่ 2 การแยกตัวประกอบ มีหลักการ ดังนี้

1. กำหนดให้เลขยกกำลังเป็นตัวแปร
2. แทนค่าตัวแปรในสมการเลขยกกำลัง
3. แยกตัวประกอบของพหุนาม
4. แก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ
5. ตรวจสอบคำตอบ

ตัวอย่างที่ 42 จงหาคำตอบของสมการ $3^{3x} = 729$

วิธีทำ จากสมการ $3^{3x} = 729$

$$3^{3x} = 3^{6}$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

ตรวจสอบ แทน $x=2$ ในสมการ $3^{3x}=729$

จะได้ $3^{3(2)}=729$

$3^{6}=729$

$729=729$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=2$

ตัวอย่างที่ 43 จงหาคำตอบของสมการ $32\cdot 2^{4x}=64\cdot 8^{x}$

วิธีทำ จากสมการ $32\cdot 2^{4x}=64\cdot 8^{x}$

$$2^{5}\cdot 2^{4x}=2^{6}\cdot 2^{3x}$$

$$2^{4x+5}=2^{3x+6}$$

$$4x+5=3x+6$$

$$4x-3x=6-5$$

$$x=1$$

ตรวจสอบ แทน $x=1$ ในสมการ $32\cdot 2^{4x}=64\cdot 8^{x}$

จะได้ $32\cdot 2^{4(1)}=64\cdot 8^{(1)}$

$32\cdot 16=64\cdot 8$

$512=512$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=1$

ตัวอย่างที่ 44 จงหาคำตอบของสมการ $100\cdot 10^{x}=9\cdot 3^{x}$

วิธีทำ จากสมการ $100\cdot 10^{x}=9\cdot 3^{x}$

$$10^{2}\cdot 10^{x}=3^{2}\cdot 3^{x}$$

$$10^{x+2}=3^{x+2}$$

เนื่องจากไม่สามารถจัดให้ฐานของเลขยกกำลังทั้งสองมีค่าเท่ากันได้

ดังนั้นสมการจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อเลขชี้กำลังเป็นศูนย์เท่านั้น

จึงกำหนดให้ $x+2=0$ จะได้ว่า $10^{0}=3^{0}$ หรือ $1=1$ เป็นจริง

เฉพาะฉะนั้น $x=-2$

ตรวจสอบ แทน $x=-2$ ในสมการ $100\cdot 10^{x}=9\cdot 3^{x}$

จะได้ว่า

$$100\cdot 10^{-2}=9\cdot 3^{-2}$$

$$100\cdot\frac{1}{10^{2}}=9\cdot\frac{1}{3^{2}}$$

$$100\cdot\frac{1}{100}=9\cdot\frac{1}{9}$$

$1=1$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบสมการนี้ คือ $x=-2$

ตัวอย่างที่ 45 จงหาคำตอบของสมการ $2^{2x+2}+4^{x+1}=8^{x+1}$

วิธีทำ จากสมการ $2^{2x+2}+4^{x+1}=8^{x+1}$

$$2^{2x+2}+2^{2x+2}=2^{3x+3}$$

$$2^{2x}\left(2^{2}+2^{2}\right)=2^{2x}\left(2^{x+3}\right)$$

$$8=2^{x+3}$$

$$8=8\cdot 2^{x}$$

$$1=2^{x}$$

$$x=0$$

ตรวจสอบ แทน $x=0$ ในสมการ $2^{2x+2}+4^{x+1}=8^{x+1}$

จะได้

$$2^{2(0)+2}+4^{0+1}=8^{0+1}$$

$$4+4=8$$

$8=8$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=0$

ตัวอย่างที่ 46 จงหาคำตอบของสมการ $2^{2x}-7\cdot 2^{x}-8=0$

วิธีทำ จากสมการ $2^{2x}-7\cdot 2^{x}-8=0$

กำหนดให้ $a=2^{x}$ จะได้ว่า

$$a^{2}-7a^{2}-8=0$$

$$(a-8)(a+1)=0$$

$$a=8,-1$$

เนื่องจาก a เป็นเรนจ์ของฟังก์ชันเลขยกกำลัง และจากนิยามของฟังก์ชันเลขยกกำลัง เรนจ์ต้องเป็นจำนวนจริงบวกเท่านั้น

จะได้ว่า $a=8$ ตัวเดียวเท่านั้น

แทนค่า $a=8$ ในสมการ $a=2^{x}$

จะได้ว่า $8=2^{x}$

$$2^{3}=2^{x}$$

$$x=3$$

ตรวจสอบ แทน $x=3$ ในสมการ $2^{2x}-7\cdot 2^{x}-8=0$

จะได้ $2^{2(3)}-7\cdot 2^{(3)}-8=0$

$$64-56-8=0$$

$0=0$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=3$

ตัวอย่างที่ 47 จงหาคำตอบของสมการ $2^{2x+3}-15\cdot 2^{x}+20=114\cdot 2^{x}+4$

วิธีทำ จากสมการ $2^{2x+3}-15\cdot 2^{x}+20=114\cdot 2^{x}+4$

กำหนดให้ $a=2^{x}$ จะได้ว่า

$$8a^{2}-15a+20=114a+4$$

$$8a^{2}-129a+16=0$$

$$(8a-1)(a-16)=0$$

$$a = \frac{1}{8}, 16$$

แทนค่า $a = \frac{1}{8}$ ในสมการ $a = 2^x$

จะได้ $\frac{1}{8} = 2^x$

$$2^{-3} = 2^x$$

$$x = -3$$

แทน $a = 16$ ในสมการ $a = 2^x$

จะได้ $16 = 2^x$

$$2^4 = 2^x$$

$$x = 4$$

ตรวจสอบ แทน $x = -3$ ใน $2^{2x+3} - 15 \cdot 2^x + 20 = 114 \cdot 2^x + 4$

จะได้ $2^{2(-3)+3} - 15 \cdot 2^{(-3)} + 20 = 114 \cdot 2^{(-3)} + 4$

$22.875 = 22.875$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x = 4$ ใน $2^{2x+3} - 15 \cdot 2^x + 20 = 114 \cdot 2^x + 4$

จะได้ $2^{2(4)+3} - 15 \cdot 2^{(4)} + 20 = 114 \cdot 2^{(4)} + 4$

$1,785 = 1,785$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x = -3$ หรือ $x = 4$

ตัวอย่างที่ 48 จงหาคำตอบของสมการ $\left(\frac{1}{7}\right)^x + 7^x = \frac{50}{7}$

วิธีทำ จากสมการ $\left(\frac{1}{7}\right)^x + 7^x = \frac{50}{7}$

กำหนดให้ $a = 7^x$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{a} + a = \frac{50}{7}$$

$$1+a^2=\frac{50a}{7}$$

$$7a^2-50a+7=0$$

$$(7a-1)(a-7)=0$$

$$a=\frac{1}{7},7$$

แทน $a=\frac{1}{7}$ ในสมการ $a=7^x$

จะได้ $\left(\frac{1}{7}\right)=7^x$

$$7^{-1}=7^x$$

$$x=-1$$

แทน $a=7$ ในสมการ $a=7^x$

จะได้ $7=7^x$

$$7^1=7^x$$

$$x=1$$

ตรวจสอบ แทน $x=-1$ ในสมการ $\left(\frac{1}{7}\right)^x+7^x=\frac{50}{7}$

จะได้ $\left(\frac{1}{7}\right)^{(-1)}+7^{(-1)}=\frac{50}{7}$

$$7+\frac{1}{7}=\frac{50}{7}$$

$\frac{50}{7}=\frac{50}{7}$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x=1$ ในสมการ $\left(\frac{1}{7}\right)^x+7^x=\frac{50}{7}$

จะได้ $\left(\frac{1}{7}\right)^{(1)}+7^{(1)}=\frac{50}{7}$

$$\frac{1}{7}+7=\frac{50}{7}$$

$$\frac{50}{7}=\frac{50}{7}$$ เป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x=-1$ หรือ $x=1$

อสมการเลขยกกำลัง คือ อสมการซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นตัวแปร การแก้อสมการเลขยกกำลัง มีหลักการ ดังนี้

1. จัดรูปให้ฐานของเลขยกกำลังมีค่าเท่ากัน
2. จัดรูปอสมการจากเลขชี้กำลัง ดังนี้
   1) กรณีฟังก์ชันเพิ่ม จัดรูปอสมการโดยให้เครื่องหมายของอสมการเป็นเครื่องหมายเดิม
   2) กรณีฟังก์ชันลด จัดรูปอสมการโดยกลับเครื่องหมายของอสมการให้ตรงข้ามกับเครื่องหมายเดิม
3. แก้สมการเพื่อหาคำตอบของอสมการ

ตัวอย่างที่ 49 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3^{3x+2}<81$

วิธีทำ จากอสมการ $3^{3x+2}<81$

$$3^{3x+2}<3^{4}$$

$$3x+2<4$$

$$x<\frac{2}{3}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$

ตัวอย่างที่ 50 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} < \left(\frac{1}{27}\right)^{x+4}$

วิธีทำ จากอสมการ $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} < \left(\frac{1}{27}\right)^{x+4}$

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right)^{2x-3} < \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right)^{x+4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-6} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12}$$

$$4x-6 > 3x+12$$

$$x > 18$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้ คือ $(18,\infty)$

ตัวอย่างที่ 51 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $5^{3x^2+6x-25} > 5^{2x^2+7x+5}$

วิธีทำ จากอสมการ $5^{3x^2+6x-25} > 5^{2x^2+7x+5}$

$$3x^2+6x-25 > 2x^2+7x+5$$

$$x^2-x-20 > 0$$

$$(x+4)(x-5) > 0$$

$$x < -4 \text{ หรือ } x > 5$$

ดังนั้น คำตอบของอสมการนี้ คือ $(-\infty,-4)\cup(5,\infty)$

2.7 การประยุกต์

ความรู้เรื่องฟังก์ชันเลขยกกำลังสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันเกี่ยวกับเรื่องต่างๆ ได้ เช่น การหาผลตอบแทนจากการฝากเงินที่มีอัตราดอกเบี้ยคงตัว การหาค่ารายงวดในการซื้อบ้านหรือซื้อรถยนต์แบบเงินผ่อน การเพิ่มของจำนวนประชากร เป็นต้น

การเพิ่มของประชากร ณ เวลาหนึ่งในกรณีที่การเพิ่มไม่ได้เป็นไปอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา

มีสูตรดังนี้ $n(t) = n_0 (1 + r)^t$

เมื่อ $n(t)$ แทน จำนวนประชากรเมื่อเวลาผ่านไป t ปี

n_0 แทน จำนวนประชากร ณ จุดเริ่มต้น

r แทน อัตราการเติบโตของจำนวนประชากรต่อเวลา

ตัวอย่างที่ 52 ในเวลา 5 ปี สมชายเลี้ยงกระรอกจำนวน 4,100 ตัว และมีอัตราการเติบโตของจำนวนกระรอก 45% ต่อปี

1) อยากทราบว่าสมชายเลี้ยงกระรอก ณ จุดเริ่มต้นประมาณกี่ตัว

2) ถ้าไม่มีการตายของกระรอกเกิดขึ้น แล้วอีก 10 ข้างหน้า จะมีจำนวนกระรอกประมาณกี่ตัว

วิธีทำ 1) จากสูตร $n(t) = n_0 (1 + r)^t$

ในที่นี้ $t = 5,\ r = \frac{45}{100} = 0.45$ และ $n(5) = 4{,}100$

จะได้ว่า $4100 = n_0 (1 + 0.45)^5$

$$n_0 = \frac{4100}{(1.45)^5}$$

$$\approx 640$$

ดังนั้น ณ จุดเริ่มต้นมีกระรอกประมาณ 640 ตัว

2) จากสูตร $n(t) = n_0 (1 + r)^t$

ในที่นี้ $t = 10,\ r = \frac{45}{100} = 0.45$ และ $n_0 = 640$

จะได้ว่า $n(10) = 640(1 + 0.45)^{10}$

$$\approx 26{,}294$$

ดังนั้น อีก 10 ปีข้างหน้ามีกระรอกประมาณ 26,294 ตัว

ตัวอย่างที่ 53 จงเขียนฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมจากการฝากเงิน 150,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปีทบต้นทุกปี เป็นเวลา m ปี โดยไม่มีการถอนเงินตลอดระยะเวลาที่ฝากเงิน

วิธีทำ กำหนดให้ m แทนจำนวนปีที่ฝากเงิน

n แทนจำนวนเงินรวมของการฝากเงินครบ m ปี

เงินต้นปีแรก 150,000 บาท ฝากครบ 1 ปี จะได้ดอกเบี้ยเท่ากับ

$$150{,}000 \times \frac{5}{100} = 7{,}500$$

จะได้เงินรวมเมื่อครบปีที่ 1 $= 150{,}000 + 7{,}500$

$$= 157{,}500$$

$$= 150{,}000 + 150{,}000 \times \frac{5}{100}$$

$$= 150{,}000\left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

นั่นคือ $m = 1$ จะได้ $n = 150{,}000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^1$

เงินต้นปีสอง $150{,}000 + 7{,}500 = 157{,}500$ บาท

ฝากครบ 1 ปี จะได้ดอกเบี้ยเท่ากับ

$$157{,}500 \times \frac{5}{100} = 7{,}875$$

จะได้เงินรวมเมื่อครบปีที่ 2 $= 157{,}500 + 7{,}875$

$$= 165{,}375$$

$$= 157{,}500 + 157{,}500 \times \frac{5}{100}$$

$$= 157{,}500\left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

แต่ $157{,}500 = 150{,}000\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ จึงได้ว่า เงินรวมเมื่อครบปีที่ 2

$$=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

$$=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$$

นั่นคือ $m=2$ จะได้ $n=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$

เงินต้นปีสาม $157{,}500+7{,}875=165{,}375$ บาท

ฝากครบ 1 ปี จะได้ดอกเบี้ยเท่ากับ

$$165{,}375\times\frac{5}{100}=8{,}268.75$$

จะได้เงินรวมเมื่อครบปีที่ 3 $=165{,}375+8{,}268.75$

$$=173{,}643.75$$

$$=165{,}375+165{,}375\times\frac{5}{100}$$

$$=165{,}375\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

แต่ $165{,}375=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$ จึงได้ว่า เงินรวมเมื่อครบปีที่ 3

$$=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

$$=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

นั่นคือ $m=3$ จะได้ $n=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก m ใดๆ จะได้สมการของฟังก์ชันแสดงเงินรวม

จากการฝากเงิน คือ $n=150{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^m$

ตัวอย่างที่ 54 การทดลองเลี้ยงแบคทีเรียบนจานเลี้ยงหนึ่งจาน ในห้องทดลองวิทยาศาสตร์ พบว่าถ้าเริ่มต้นจำนวนเซลล์แบคทีเรีย 10,000 เซลล์ และคาบเวลาการแบ่งตัว ใช้เวลา 120 นาที ให้ f(t) เป็นจำนวนเซลล์แบคทีเรียที่อยู่ในจานเลี้ยงในเวลา t นาที ซึ่งหาได้จากสูตร $f(t) = 10,000(2)^{\frac{t}{120}}$

จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 12 ชั่วโมง จะมีจำนวนเซลล์แบคทีเรียเท่าไร

วิธีทำ จากสูตร $f(t) = 10,000(2)^{\frac{t}{120}}$

เมื่อเวลาผ่านไป 12 ชั่วโมง หรือ $12 \times 60 = 720$ นาที

จะได้ $t = 720$

ดังนั้น $f(720) = 10,000(2)^{\frac{720}{120}}$

$= 10,000(2)^{6}$

$= 640,000$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 12 ชั่วโมง มีจำนวนแบคทีเรีย 640,000 เซลล์

2.8 สรุป

ฟังก์ชันเลขยกกำลัง เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น การคำนวณหาจำนวนดอกเบี้ยเงินฝาก การคำนวณการเพิ่มของประชากร เป็นต้น ซึ่งในการศึกษาฟังก์ชันเลขยกกำลัง จำเป็นต้องอาศัยความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเลขยกกำลัง สมบัติเลขยกกำลัง รวมถึงการแก้สมการของเลขยกกำลัง เป็นต้น เพื่อนำความรู้เหล่านี้มาแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย หรือมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

   1) $(-3)^0$

   2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

   3) $5^9 \cdot 25^4$

   4) $(0.6)^3 \cdot (0.6)^{-7}$

   5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{1}{3}\right)^3$

   6) $(3 \cdot 7)^2$

   7) $\left((0.2)^{-5}\right)^2$

   8) $\left(\frac{5^{-2} \cdot 5^4}{5^3}\right)^{-1}$

   9) $\left(\frac{7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^5}{7^8}\right)^3$

   10) $\left(\frac{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10}{10^4}\right)^{-2}$

2. จงเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นบวก โดย a,b,m และ y เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับศูนย์

   1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$

   2) $x^{\frac{3}{4}} \cdot x$

3) $b^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}$

4) $m^{-\frac{1}{2}} \div m^{\frac{1}{4}}$

5) $a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{3}}$

6) $\left(m^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{4}}$

7) $\left(k^{\frac{3}{5}}\right)^{10}$

8) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a}}\right)^{4}$

9) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^{4}$

10) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x}$

3. จงหาค่าของ

1) $16^{\frac{1}{4}}$

2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

3) $100^{\frac{1}{2}}$

4) $(0.1)^{-\frac{1}{2}}$

5) $(0.0001)^{-\frac{1}{4}}$

4. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ โดยให้เลขชี้กำลังเป็นบวก (กำหนดตัวอักษรทุกตัวแทนจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์)

1) $\left[\left(a^{-3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$

2) $\left[\left(\sqrt{a^{4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}$

3) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{3}\cdot\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^{2}$

4) $\left(\sqrt[4]{a^{3}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[5]{a^{6}}\right)^{\frac{5}{12}}$

5. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1) $2^{a+3}\times 2^{3a-4}\times 2^{-a-6}$

2) $\dfrac{25^{ax-2}\times 25^{a+7}}{25^{2a+1}}$

3) $\dfrac{4^{2a+2}\times 5^{a}+4^{2a}\times 5^{a+1}}{4^{2a+1}\times 5^{a}+4^{2a}\times 5^{a+3}}$

6. จงเปลี่ยนจำนวนต่อไปนี้เป็นผลสำเร็จ

1) $\sqrt{28}+\sqrt{175}-2\sqrt{63}$

2) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{250}-3\sqrt[3]{54}$

3) $625^{\frac{1}{16}}+25^{\frac{1}{8}}-125^{\frac{1}{12}}$

4) $2\sqrt{80}-2\sqrt{\frac{1}{5}}-5\sqrt{\frac{1}{125}}$

7. จงทำให้ส่วนของจำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนตรรกยะ

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

2) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3) $\dfrac{1}{\left(1-\sqrt{5}\right)+\sqrt{6}}$

4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{8}}$

8. จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

1) $9+2\sqrt{14}$
2) $11-2\sqrt{30}$
3) $18+12\sqrt{2}$
4) $32-8\sqrt{15}$
5) $10\sqrt{11}+2\sqrt{231}$
6) $\sqrt{486}-\sqrt{336}$
7) $9m+8n+12\sqrt{2mn}$
8) $12m+2n-4\sqrt{6mn}$ โดยที่ $m>0, n>0$

9. จงหาค่าของ

1) $\sqrt{1+\sqrt{21+12\sqrt{3}}}$

2) $\sqrt{4+\sqrt{5}+\sqrt{17-4\sqrt{15}}}$

3) $\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2-\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

4) $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$

5) $\sqrt{19+4\sqrt{21}}+\sqrt{7}-\sqrt{12}-\sqrt{29-2\sqrt{28}}$

6) $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

10. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $\sqrt{x-5}=7$

2) $\sqrt{2x+5}=17$

3) $5+\sqrt[3]{x-2}=12$

4) $3\sqrt{8x}=2\sqrt{15x+6}$

5) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}$

6) $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{3\sqrt{x}-5}{3\sqrt{x}-13}$

7) $x^2+6\sqrt{x^2-2x+5}=11+2x$

8) $9x-3x^2+4\sqrt{x^2-3x+5}=11$

11. จงเขียนกราฟและบอกว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y=4^x$

2) $y=2^{x+2}$

3) $y=2^x-3$

4) $y=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x$

12. จงแก้สมการต่อไปนี้

1) $12^x=1{,}728$

2) $8^{x+2}=\dfrac{1}{64}$

3) $4^{2x+2}+16^{x+1}=32^{x-1}$

4) $5^{2x}-30\cdot 5^{x}+125=0$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2^{x}=\frac{5}{2}$

13. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1) $2^{3x}<64$

2) $\left(\frac{16}{25}\right)^{3x+1}>\frac{256}{625}$

3) $27^{2x+2}>81^{x-3}$

4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+5}<\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3}$

5) $7^{2x^{2}-x-12}>7^{x^{2}-x-2}$

14. กำหนดให้ y แทนจำนวนประชากรรวมของจังหวัดแห่งหนึ่ง

x แทนจำนวนปีที่ทำให้ได้จำนวนประชากรรวมในแต่ละปี

โดยที่จำนวนประชากรรวมเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y=100{,}000(1.5)^{\frac{x}{2}}$ จงหาว่า

1) อีก 6 ปีข้างหน้าจังหวัดแห่งนี้จะมีประชากรรวมจำนวนกี่คน

2) อีก 10 ปีข้างหน้าจังหวัดแห่งนี้จะมีประชากรรวมจำนวนกี่คน

เอกสารอ้างอิง

เลิศ สิทธิโกศล. (2540). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. กรุงเทพฯ : สกายบุ้กส์.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2557) **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4—6. (พิมพ์ครั้งที่ 6)**. กรุงเทพฯ:สกสค. ลาดพร้าว.

Anton Howard.(1992). **Multivariable Calculus.** New York, Anton Textbook, Inc.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

เนื้อหาประจำบท

บทที่ 3 ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น

3.1 ฟังก์ชันลอการิทึม

3.2 สมบัติของลอการิทึม

3.3 กราฟฟังก์ชันลอการิทึม

3.4 ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ

3.5 การแก้สมการลอการิทึม

3.6 การประยุกต์

3.7 สรุป

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อศึกษาบทที่ 3 แล้วนักศึกษาสามารถ

1. อธิบายนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมได้
2. วาดกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมได้
3. ใช้กฎของลอการิทึมได้
4. ใช้หลักการแอนติลอการิทึมได้
5. อธิบายนิยามของลอการิทึมธรรมชาติได้
6. แก้สมการลอการิทึมได้
7. นำสมการฟังก์ชันลอการิทึมไปประยุกต์ใช้ได้

กิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนอธิบายทฤษฎีบทและซักถามพร้อมยกตัวอย่างประกอบการบรรยายโดยใช้ไฟล์พาวเวอร์พอยนต์
2. แบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละประมาณ 5 คน เพื่อศึกษาตัวอย่างในเอกสารประกอบการสอนแล้วนำเสนอ
3. ให้ผู้เรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป เรื่อง ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น
4. ผู้เรียนและผู้สอนร่วมกันอภิปรายและหาข้อสรุปร่วมกัน
5. ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดบทที่ 3

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป เรื่อง ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น
2. ไฟล์เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป
3. ไฟล์พาวเวอร์พอยนต์ เรื่อง ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น
4. หนังสืออ่านประกอบค้นคว้าเพิ่มเติม
5. แบบฝึกหัดบทที่ 3

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากการซักถามผู้เรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม
3. สังเกตจากความสนใจ
4. ประเมินจากการทำแบบฝึกหัด
5. ประเมินจากการสอบระหว่างภาคและปลายภาค

บทที่ 3
ฟังก์ชันลอการิทึมเบื้องต้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันลอการิทึม สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม การแก้สมการฟังก์ชันลอการิทึมและอื่นๆ ซึ่งมีพื้นฐานมาจากบทที่ 2 เรื่องฟังก์ชันเลขยกกำลัง เพราะฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขยกกำลัง ซึ่งผู้เรียนจะได้ศึกษาในเรื่องต่อไปนี้

3.1 ฟังก์ชันลอการิทึม

จากบทที่ 2 จะได้ว่าฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขยกกำลัง ทำให้เราได้นิยามของฟังก์ชันลอการิทึมดังนี้

นิยาม 1 กำหนด $a > 1$ และ $a \neq 1$ และ $y \in \mathbb{R}$

ถ้า $a^y = x$ จะได้ y คือ log ของจำนวน x บนฐาน a ซึ่งเขียนได้เป็น $y = \log_a x$

นั่นคือ ฟังก์ชันลอการิทึม $f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \,\middle|\, y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1 \right\}$

หมายเหตุ $y = \log_a x$ อ่านว่า “y เท่ากับ log ของจำนวน x บนฐาน a” หรือ

“y เท่ากับ log x ฐาน a”

ดังนั้น ถ้า $a^y = x$ แล้วจะได้ $y = \log_a x$

เมื่อ y คือค่าของ log ซึ่งเป็นจำนวนจริงใดๆ

a คือฐานของ log ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกและไม่เท่ากับ 1

x คือจำนวนของ log ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวก เพราะว่าเมื่อ $a > 0$ และ $y \in \mathbb{R}$ แล้ว $a^y > 0$ เสมอ

จากนิยามข้างต้นเราสามารถ เขียนเลขยกกำลังในอยู่ในรูปลอการิทึมได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนเลขยกกำลังต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปลอการิทึม

1) $2^4 = 16$

2) $(0.2)^4 = 0.0016$

3) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

4) $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

วิธีทำ

1) $2^4 = 16$ เขียนเป็นลอการิทึมได้ $\log_2 16 = 4$

2) $(0.2)^4 = 0.0016$ เขียนเป็นลอการิทึมได้ $\log_{0.2} 0.0016 = 4$

3) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ เขียนเป็นลอการิทึมได้ $\log_5 \frac{1}{5} = -1$

4) $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ เขียนเป็นลอการิทึมได้ $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = 3$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนลอการิทึมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

1) $\log_2 8 = 3$

2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

3) $\log_{10} 0.01 = -2$

4) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

วิธีทำ

1) $\log_2 8 = 3$ เขียนเป็นเลขยกกำลังได้ $2^3 = 8$

2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ เขียนเป็นเลขยกกำลังได้ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

3) $\log_{10} 0.01 = -2$ เขียนเป็นเลขยกกำลังได้ $10^{-2} = 0.01$

4) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ เขียนเป็นเลขยกกำลังได้ $(\sqrt{3})^4 = 9$

ในการหาค่า $\log_a y$ เราจะกำหนดให้ $\log_a y$ เท่ากับ x และเขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลัง $a^x = y$ แล้วแก้สมการเลขยกกำลัง โดยใช้สมบัติเลขยกกำลังมาแก้สมการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1) $\log_2 32$

2) $\log_5 625$

3) $\log_7 343$

วิธีทำ

1) $\log_2 32$

กำหนดให้ $\log_2 32 = x$

จะได้ $2^x = 32$

$2^x = 2^5$

$x = 5$

ดังนั้น $\log_2 32 = 5$

2) $\log_5 625$

กำหนดให้ $\log_5 625 = x$

จะได้ $5^x = 625$

$5^x = 5^4$

$x = 4$

ดังนั้น $\log_5 625 = 4$

3) $\log_7 343$

กำหนดให้ $\log_7 343 = x$

จะได้ $7^x = 343$

$7^x = 7^3$

$x = 3$

ดังนั้น $\log_7 343 = 3$

แต่ถ้าการหาค่าลอการิทึมอยู่ในรูปที่ยากขึ้น เราต้องใช้สมบัติของลอการิทึมมาช่วยในการหาค่าเพื่อง่าย รวดเร็วและถูกต้องดังหัวข้อต่อไปนี้

3.2 สมบัติของลอการิทึม

เมื่อ a,M,N เป็นจำนวนจริงบวก $a > 0, a \neq 1$ และ n เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^n = n\log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a M} = M$
7. $\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N}$ เมื่อ $N \neq 1$
8. $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$ เมื่อ $M \neq 1$
9. $M^{\log_a N} = N^{\log_a M}$
10. $\log_{a^n} M = \frac{1}{n}\log_a M$
11. $\log_{a^N} a^M = \frac{M}{N}$

การหาค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับลอการิทึม สามารถนำสมบัติข้างต้นมาใช้ในการหาค่าและแก้ปัญหาได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า x จากสมการต่อไปนี้

1) $\log_3 x = 4$

2) $\log_x 125 = 3$

3) $\log_2(x-1) = 5$

4) $\log_5(\log_5 x) = 0$

5) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$

วิธีทำ

1) $\log_3 x = 4$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้ $x = 3^4$

ดังนั้น $x = 81$

2) $\log_x 125 = 3$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้ $125 = x^3$

$5^3 = x^3$

ดังนั้น $x = 5$

3) $\log_2(x-1) = 5$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้ $x - 1 = 2^5$

$x = 32 + 1$

ดังนั้น $x = 33$

4) $\log_5(\log_5 x) = 0$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้ $\log_5 x = 5^0$

$\log_5 x = 1$ เพราะว่า $5^0 = 1$

$x = 5^1$

ดังนั้น $x = 5$

5) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้ $x^2 - 2x = 2^3$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

ดังนั้น $x = 4$ หรือ $x = -2$

การหาค่าของ log อาจไม่สามารถหาได้โดยตรงต้องอาศัยสมบัติของลอการิทึม มาช่วยในการหาคำตอบ และกำหนดค่าของ log บางค่ามาให้ เพื่อหาอีกค่าหนึ่ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$ และ $\log 3 = 0.4771$ จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1) log 12
2) log 54
3) log 72
4) log 256
5) log 729

วิธีทำ

1) log 12

$$\log 12 = \log(2^2 \times 3)$$
$$= \log 2^2 + \log 3$$
$$= 2\log 2 + \log 3$$
$$= 2(0.3010) + 0.4771$$
$$= 1.0791$$

ดังนั้น $\log 12 = 1.0791$

2) log 54

$$\log 54 = \log(3^3 \times 2)$$
$$= \log 3^3 + \log 2$$

$= 3\log 3 + \log 2$

$= 3(0.4771) + 0.3010$

$= 1.7323$

ดังนั้น $\log 54 = 1.7323$

3) log 72

$\log 72 = \log(2^3 \times 3^2)$

$= \log 2^3 + \log 3^2$

$= 3\log 2 + 2\log 3$

$= 3(0.3010) + 2(0.4771)$

$= 1.8572$

ดังนั้น $\log 72 = 1.8572$

4) log 256

$\log 256 = \log(2^8)$

$= 8\log 2$

$= 8(0.3010)$

$= 2.4080$

ดังนั้น $\log 256 = 2.4080$

5) log 729

$\log 729 = \log(3^6)$

$= 6\log 3$

$= 6(0.4771)$

$= 2.8626$

ดังนั้น $\log 729 = 2.8626$

การใช้สมบัติของลอการิทึมมาใช้ในการหาค่าของ log ที่ได้กำหนดค่า log มาให้ไม่ตรงกับที่ต้องการหาค่า ต้องจัดรูปให้มี log ตรงตามกำหนดแล้วใช้สมบัติของลอการิทึมหาค่าต่อไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 ถ้ากำหนดให้ $\log 4.85 = 0.6857$ จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1) $\log 485$
2) $\log 0.485$
3) $\log 0.000485$
4) $\log 4{,}850{,}000$

วิธีทำ

1) $\log 485$

$\log 485 = \log(4.85 \times 10^2)$

$= \log 4.85 + \log 10^2$

$= \log 4.85 + 2\log 10$

$= 0.6857 + 2$

$= 2.6857$

ดังนั้น $\log 485 = 2.6857$

2) $\log 0.485$

$\log 0.485 = \log(4.85 \times 10^{-1})$

$= \log 4.85 + \log 10^{-1}$

$= \log 4.85 - 1\log 10$

$= 0.6857 - 1$

$= -0.3143$

ดังนั้น $\log 0.485 = -0.3143$

3) log 0.000485

$\log 0.000485 = \log(4.85 \times 10^{-4})$

$= \log 4.85 + \log 10^{-4}$

$= \log 4.85 - 4\log 10$

$= 0.6857 - 4$

$= -3.3143$

ดังนั้น $\log 0.000485 = -3.3143$

4) log 4,850,000

$\log 4{,}850{,}000 = \log(4.85 \times 10^{6})$

$= \log 4.85 + \log 10^{6}$

$= \log 4.85 + 6\log 10$

$= 0.6857 + 6$

$= 6.6857$

ดังนั้น $\log 4{,}850{,}000 = 6.6857$

แต่ถ้าโจทย์ที่กำหนดมาให้ ไม่สามารถจัดรูปและใช้สมบัติของลอการิทึมได้ จะต้องใช้ความรู้เรื่องการเปรียบเทียบ ในการหาค่าดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $\log 0.0631 = -1.2$ และ $\log 6320 = 3.8007$

จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1) log 0.006317

2) log 631.7

วิธีทำ

1) log 0.006317

$\log 0.006317 = \log(6.317 \times 10^{-3})$

$= \log 6.317 + \log 10^{-3}$

$= \log 6.317 - 3$

พิจารณาการหาค่าของ $\log 6.317$ มีวิธีการดังนี้

จาก $\log 0.0631 = -1.2$ จะได้ $\log 6.310 = 0.8$ และ

จาก $\log 6320 = 3.8007$ จะได้ $\log 6.320 = 0.8007$

เปรียบเทียบระยะห่างได้ดังนี้

$$0.010\left\{\begin{array}{l} 0.007\left\{\begin{array}{l}\log 6.310 = 0.8 \\ \log 6.317 = N\end{array}\right\}d \\ \qquad \log 6.320 = 0.8007 \end{array}\right\}0.0007$$

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้

$$\frac{d}{0.0007} = \frac{0.007}{0.010}$$

$$d = \frac{0.007 \times 0.0007}{0.010}$$

$$d = 0.00049$$

จะได้ $N = 0.8 + 0.00049$

นั่นคือ $\log 6.317 = 0.80049$

เฉพาะฉะนั้น $\log 6.317 - 3 = 0.80049 - 3 = -2.19951$

ดังนั้น $\log 0.006317 = -2.19951$

2) $\log 631.7$

$\log 631.7 = \log(6.317 \times 10^2)$

$= \log 6.317 + \log 10^2$

$= \log 6.317 + 2\log 10$

$= 0.80049 + 2$

$= 2.80049$

ดังนั้น $\log 631.7 = 2.80049$

ต่อไปนี้เราจะนำเอา log มากระทำในลักษณะ การบวก การลบ การคูณ การหาร และการกระทำในลักษณะพิเศษ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\log_2 16+\log_3 27+\log_{\frac{1}{4}} 256$

วิธีทำ จาก

$$\log_2 16+\log_3 27+\log_{\frac{1}{4}} 256=\log_2 2^4+\log_3 3^3+\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

$$=4\log_2 2+3\log_3 3-\frac{8}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$

$$=4+3-4$$

$$=3$$

ดังนั้น $\log_2 16+\log_3 27+\log_{\frac{1}{4}} 256=3$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\log_2\log_3 10^{12}-\log_2\log_3 10^3$

วิธีทำ จาก

$$\log_2\log_3 10^{12}-\log_2\log_3 10^3=\log_2(12\log_3 10)-\log_2(3\log_3 10)$$

$$=\log_2\left(\frac{12\log_3 10}{3\log_3 10}\right)$$

$$=\log_2 4$$

$$=\log_2 2^2$$

$$=2\log_2 2$$

$$=2$$

ดังนั้น $\log_2\log_3 10^{12}-\log_2\log_3 10^3=2$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{255} 256$

วิธีทำ จาก

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{255} 256=\frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 4}{\log 3}\cdot\frac{\log 5}{\log 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\log 256}{\log 255}$$

$$= \frac{\log 256}{\log 2}$$

$$= \log_2 256$$

$$= \log_2 2^8$$

$$= 8$$

ดังนั้น $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{255} 256 = 8$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\log_3 \log_2 \log_2 \log_2 16$

วิธีทำ จาก $\log_3 \log_2 \log_2 \log_2 16 = \log_3 \log_2 \log_2 \log_2 2^4$

$$= \log_3 \log_2 \log_2 4$$

$$= \log_3 \log_2 \log_2 2^2$$

$$= \log_3 \log_2 2$$

$$= \log_3 1$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\log_3 \log_2 \log_2 \log_2 16 = 0$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ $25^{1-\log_5 2} + 3^{-\log_3 2} - 16^{\log_4 3}$

วิธีทำ จาก $25^{1-\log_5 2} + 3^{-\log_3 2} - 16^{\log_4 3}$

$$= 5^2 \cdot 5^{-2\log_5 2} + 3^{-\log_3 2} - 4^{2\log_4 3}$$

$$= 5^2 \cdot 5^{\log_5 2^{-2}} + 3^{\log_3 2^{-1}} - 4^{\log_4 3^2}$$

$$= 5^2 (2^{-2}) + (2^{-1}) - 3^2$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{1}{2} - 9$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{2}{4} - \frac{36}{4}$$

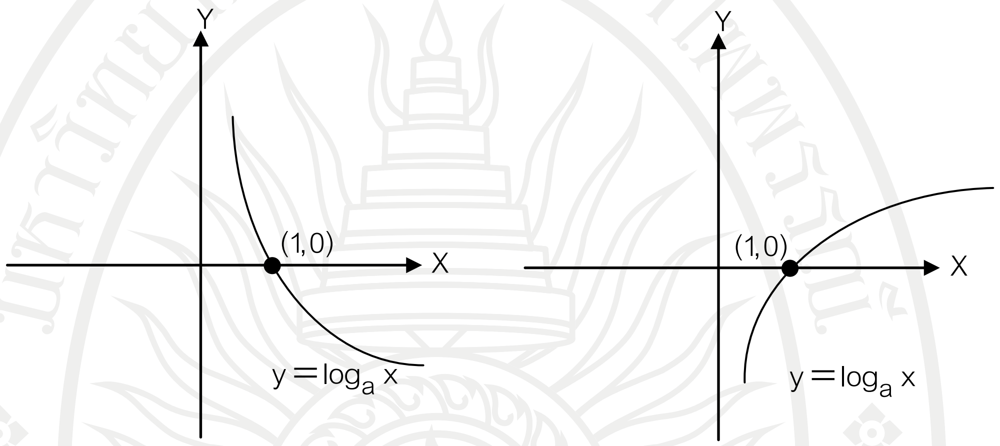
$$= -\frac{19}{4}$$

ดังนั้น $25^{1-\log_5 2} + 3^{-\log_3 2} - 16^{\log_4 3} = -\frac{19}{4}$

3.3 กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

จากสมการ $y = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ จึงสามารถแบ่ง a ได้เป็น 2 ช่วง คือ $0 < a < 1$ และ $a > 1$ เมื่อนำมาเขียนกราฟได้ดังนี้

กรณี $0 < a < 1$ กรณี $a > 1$

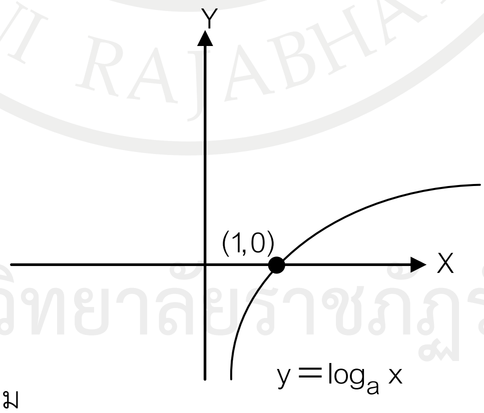


ภาพที่ 3.1 แสดงกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

จากกราฟจะได้ว่า

1. กราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ ผ่านจุด (1,0) เสมอ
2. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด
3. ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
4. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1−1 จาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$
5. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1−1 จะได้ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ของฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่ง $a > 1$ มีลักษณะกราฟดังนี้



ภาพที่ 3.2 แสดงฟังก์ชันเพิ่ม

เมื่อ $a > 1$ ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก x_1 เป็น x_2

โดย $x_2 > x_1$ ทำให้ $\log_a x_2 > \log_a x_1$ หรือ

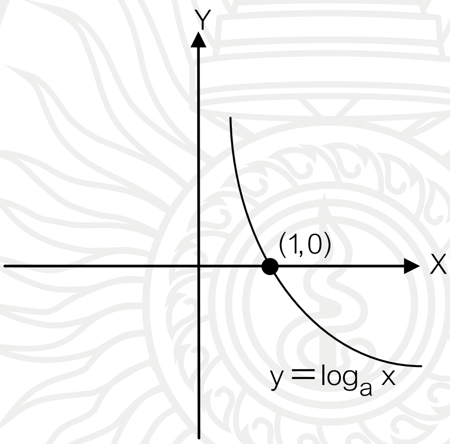
$x_2 < x_1$ ทำให้ $\log_a x_2 < \log_a x_1$

สรุปได้ดังนี้

1) เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ทำให้ค่าของ $\log_a x$ เพิ่มขึ้นด้วย

2) เมื่อค่าของ x ลดลง ทำให้ค่าของ $\log_a x$ ลดลงตาม

ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ของฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่ง $0 < a < 1$ มีลักษณะกราฟดังนี้



ภาพที่ 3.3 แสดงฟังก์ชันลด

เมื่อ $0 < a < 1$ ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันลด คือ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก x_1 เป็น x_2

โดย $x_2 > x_1$ ทำให้ $\log_a x_2 < \log_a x_1$ หรือ

$x_2 < x_1$ ทำให้ $\log_a x_2 > \log_a x_1$

สรุปได้ดังนี้

1) เมื่อค่าของ x เพิ่มขึ้น ทำให้ค่าของ $\log_a x$ ลดลงตาม

2) เมื่อค่าของ x ลดลง ทำให้ค่าของ $\log_a x$ เพิ่มขึ้นด้วย

3.4 ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ

ลอการิทึมสามัญ หมายถึง ลอการิทึมที่มีฐานของลอการิทึมเป็นฐานสิบ เขียนแทนด้วย $\log_{10} N$ หรือ $\log N$

การหาค่า $\log N$ มีวิธีการดังนี้

1) จัดรูปให้ $N = A \times 10^n$ โดยที่ $1 \le A < 10$, $n \in I$

2) แทนค่า N จะได้ $\log N = \log\left(A \times 10^n\right)$

$$= \log A + \log 10^n$$

$$= \log A + n$$

ดังนั้นจะได้ $\log N = \log A + n$

เรียก $\log A$ ว่า ค่าแมนทิสซา และ

เรียก n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มว่า ค่าแคแรกเทอริสติก

ซึ่งในการหาค่าแมนทิสซา และค่าแคแรกเทอริสติก จะต้องจัดรูปให้อยู่ใน $\log(A \times 10^n)$ ก่อนเสมอ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 13 จงบอกว่าค่าแมนทิสซาและค่าแคแรกเทอริสติกของ $\log 125$

วิธีทำ จาก $\log 125$ จัดรูปให้อยู่ใน $\log(A \times 10^n)$

จะได้ $\log 125 = \log(1.25 \times 10^2)$

$$= \log 1.25 + \log 10^2$$

$$= \log 1.25 + 2$$

นั่นคือ $\log 125 = \log 1.25 + 2$

ดังนั้นจะได้ ค่าแมนทิสซา คือ $\log 1.25$

และ ค่าแคแรกเทอริสติก คือ 2

ตัวอย่างที่ 14 จงบอกว่าค่าแมนทิสซาและค่าแคแรกเทอริสติกของ $\log 0.00214$

วิธีทำ จาก $\log 0.00214$ จัดรูปให้อยู่ใน $\log(A\times10^{n})$

จะได้ $\log 0.00214 = \log(2.14\times10^{-3})$

$= \log 2.14 + \log 10^{-3}$

$= \log 2.14 - 3$

นั่นคือ $\log 0.00214 = \log 2.14 - 3$

ดังนั้นจะได้ ค่าแมนทิสซา คือ $\log 2.14$

และ ค่าแคแรกเทอริสติก คือ -3

ลอการิทึมธรรมชาติ หมายถึง ลอการิทึมที่มีฐานเป็นฐาน e เมื่อ e เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่ง $e \approx 2.1782818...$ กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $\log_e x$ เขียนแทนด้วย $\ln x$ เนื่องจาก $\ln x$ เปลี่ยนฐานมาจาก log ดังนั้นสมบัติของ $\ln x$ ยังคงเหมือนกันกับสมบัติของ log ดังหัวข้อต่อไปนี้

3.4.1 สมบัติของลอการิทึมธรรมชาติ

กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก

1. $\ln xy = \ln x + \ln y$
2. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
3. $\ln x^{p} = p\ln x$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริงใดๆ
4. $\ln 1 = 0$
5. $\ln e = 1$
6. $e^{\ln x} = x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ
7. $\ln x = \frac{\log x}{\log e}$

การหาค่าของ $\ln x$ ทำได้โดยการเปลี่ยนให้เป็นลอการิทึมฐานสิบ

ดังนั้น $\ln x = \log_e x = \dfrac{\log x}{\log e} = \dfrac{\log x}{0.4343}$ หรือ $\ln x = (2.3026)\log x$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่าของข้อต่อไปนี้ (ใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

1) $\ln 72$ กำหนดให้ $\log 72 = 1.8573$

2) $\ln 0.2547$ กำหนดให้ $\log 2547 = 3.4060$

วิธีทำ

1) $\ln 72$ กำหนดให้ $\log 72 = 1.8573$

จาก $\ln 72 = \dfrac{\log 72}{\log e} = \dfrac{\log 72}{0.4343}$

กำหนดให้ $\log 72 = 1.8573$

จะได้ $\ln 72 = \dfrac{1.8573}{0.4343}$

ดังนั้น $\ln 72 = 4.2765$

2) $\ln 0.2547$ กำหนดให้ $\log 2547 = 3.4060$

จาก $\ln 0.2547 = \dfrac{\log 0.2547}{\log e} = \dfrac{\log(2574 \times 10^{-4})}{\log e} = \dfrac{\log 2574 - 4}{0.4343}$

กำหนดให้ $\log 2547 = 3.4060$

จะได้ $\ln 0.2547 = \dfrac{3.4060 - 4}{0.4343}$

ดังนั้น $\ln 0.2547 = -1.3677$

3.4.2 การหาค่าลอการิทึม

ค่าของ log ฐาน 10

สังเกตเลขยกกำลังและลอการิทึมต่อไปนี้

เลขยกกำลัง	ลอการิทึม
$10^{4} = 10,000$	$\log_{10} 10,000 = 4$
$10^{3} = 1,000$	$\log_{10} 1,000 = 3$
$10^{2} = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
$10^{1} = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$10^{-1} = 0.1$	$\log_{10} 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log_{10} 0.01 = -2$
$10^{-3} = 0.001$	$\log_{10} 0.001 = -3$
$10^{-4} = 0.0001$	$\log_{10} 0.0001 = -4$

จากข้างต้นจะเห็นว่า

ถ้าจำนวนของ log เป็น 10^{n} เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ค่าของ log จะเป็นจำนวนเต็ม n

ถ้าจำนวนของ log ไม่เป็น 10^{n} เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ค่าของ log จะเป็นจำนวนเต็ม n

ถ้าจำนวนของ log มีค่ามากกว่า 1 ค่าของ log จะเป็นบวก และ

ถ้าจำนวนของ log มีค่าน้อยกว่า 1 ค่าของ log จะเป็นลบ

เช่น $1 < 3 < 10$ ดังนั้นจะได้ว่า $\log 1 < \log 3 < \log 10$ แต่เนื่องจาก $\log 1 = 0$ และ $\log 10 = 1$

เพราะฉะนั้น $0 < \log 3 < 1$

ตัวอย่างที่ 16 จงประมาณค่าของ log 12 ว่าอยู่ในช่วงจำนวนเต็มใด

วิธีทำ จาก log 12

เปรียบเทียบกันจะได้ว่า $\log 10 < \log 12 < \log 100$

จะได้ $1 < \log 12 < 2$

ดังนั้น log 12 มีค่ามากกว่า 1 แต่น้อยกว่า 2

ตัวอย่างที่ 17 จงประมาณค่าของ $\log 0.124$ ว่าอยู่ในช่วงจำนวนเต็มใด

วิธีทำ จาก $\log 0.124$

เปรียบเทียบกันจะได้ว่า $\log 10^{-1} < \log 0.124 < \log 1$

จะได้ว่า $-1 < \log 0.124 < 0$

ดังนั้น $\log 0.124$ มีค่ามากกว่า -1 แต่น้อยกว่า 0

3.4.3 แอนติลอการิทึม

แอนติลอการิทึม เป็นการดำเนินการที่ตรงข้ามกับการหาค่าลอการิทึม กล่าวคือ แทนที่จะกำหนดค่า x แล้วให้หา log x กลับกำหนดค่า log x แล้วให้หาค่า x จำนวนจริง x ที่ได้เราเรียกว่า “แอนติลอการิทึม ของ log x” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ Antilog(log x)

นั่นคือ $\text{Antilog}(\log x) = x$

เมื่อกำหนดค่าของ log x สามารถหาค่า x ได้ดังนี้

เขียน log x ให้เป็นผลบวกของค่าแมนทิสซากับค่าแคแรกเทอริสติกของ log x ได้ดังนี้ $\log x = M + n$

โดยที่ M แทนค่าแมนทิสซาของ log x และ

n แทนค่าแคแรกเทอริสติกของ log x

แล้วใช้ตารางลอการิทึมสามัญหาจำนวนจริง N ที่ทำให้ $\log N = M$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \log x &= \log N + n \\ &= \log N + \log 10^{n} \\ &= \log(N \times 10^{n}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x = N \times 10^{n}$

เนื่องจาก แอนติลอการิทึมของจำนวนจริงมีทั้งจำนวนที่เป็นบวกและจำนวนที่เป็นลบ ดังนั้น วิธีการแอนติลอการิทึมแบ่งเป็น 2 หัวข้อต่อไปนี้

3.4.3.1 การหาค่าแอนติลอการิทึมของจำนวนที่เป็นบวก

มีวิธีการดังนี้

แยกค่าของ Antilog เป็น 2 ส่วน ได้แก่ ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มและทศนิยม จากนั้นหาค่า Antilog ของจำนวนเต็ม ซึ่งมีค่าเท่ากับ 10 ยกกำลังด้วยตัวเลขนั้น และหาค่า Antilog ของตัวเลขทศนิยม โดยใช้ตารางลอการิทึม แล้ว นำค่า Antilog ทั้งสองส่วนมาคูณกัน จะได้ค่า Antilog ของจำนวน log N นั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 18 จงคำนวณค่าของ Antilog 4.7574 โดยกำหนดให้ Antilog 0.7574 $=$ 5.720

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned} \text{Antilog}\,4.7574 &= \text{Antilog}(0.7574+4) \\ &= (\text{Antilog}\,0.7574)\times(\text{Antilog}\,4) \\ &= 5.720\times10^{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\text{Antilog}\,4.7574 = 5.720\times10^{4}$

ตัวอย่างที่ 19 จงคำนวณค่าของ Antilog 5.3738 โดยกำหนดให้ Antilog 0.3738 $=$ 2.3651

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned} \text{Antilog}\,5.3738 &= \text{Antilog}(0.3738+5) \\ &= (\text{Antilog}\,0.3738)\times(\text{Antilog}\,5) \\ &= 2.3651\times10^{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\text{Antilog}\,5.3738 = 2.3651\times10^{5}$

3.4.3.2 การหาค่าแอนติลอการิทึมของจำนวนที่เป็นลบ

เนื่องจากค่าแมนทิสซาของ log x จะเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้นค่าของ $\log N < 0$ ต้องมีวิธีการปรับดังต่อไปนี้

นำเลขจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า log N บวกเข้ากับค่าของ log N และลบออกจำนวนเต็มจำนวนเดียวกัน เพื่อทำให้ได้ตัวเลขทศนิยมที่เป็นบวก แต่การทำเช่นนี้จะทำให้ค่าไม่เปลี่ยนไปหรือเทียบเท่าค่าเดิม จากนั้นหาค่า Antilog ของตัวเลขทศนิยมที่เป็นบวก โดยใช้ตารางลอการิทึม และหาค่า Antilog ของจำนวนเต็มที่เป็นลบ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 10 ยกกำลังด้วย

จำนวนเต็มที่เป็นลบแล้วนำค่า Antilog ของทั้งสองส่วนมาคูณกัน จะได้ค่า Antilog ของจำนวน log N ที่เป็นลบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 20 จงคำนวณค่าของ $\text{Antilog}(-4.3441)$ โดยกำหนดให้ $\text{Antilog}\,0.6559 = 4.5283$

วิธีทำ จาก $\text{Antilog}(-4.3441) = \text{Antilog}(-4.3441 + 5 - 5)$

$$= \text{Antilog}(0.6559 - 5)$$

$$= (\text{Antilog}\,0.6559) \times (\text{Antilog}(-5))$$

$$= 4.5283 \times 10^{-5}$$

ดังนั้น $\text{Antilog}(-4.3441) = 4.5283 \times 10^{-5}$

ถ้ามีลอการิทึมทั้งสองข้างของสมการ สามารถแอนติลอการิทึมได้ทั้งสองข้างพร้อมกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดให้ $\log 5.55 = 0.7443$ และ $\log x = 3.7443$ จงหาค่าของ x

วิธีทำ จาก $\log x = 3.7443$

เขียนในรูปผลบวกของค่าแมนทิสซากับค่าแคแรกเทอริสติกของ $\log x$

จะได้ $\log x = 0.7443 + 3$

จากกำหนดให้ $\log 5.55 = 0.7443$

จะได้ $\log x = \log 5.55 + 3$

จัดรูปใหม่ $\log x = \log 5.55 + \log 10^3$

จะได้ $\log x = \log(5.55 \times 10^3)$

$$\log x = \log 5{,}550$$

แอนติลอการิทึม จะได้ $x = 5{,}550$

ดังนั้น $x = 5{,}550$

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดให้ $\log 2.87 = 0.4579$ และ $\log 2.88 = 0.4594$

จงหาจำนวนจริง x เมื่อกำหนด $\log x$ ดังต่อไปนี้

1) $\log x = 4.4586$

2) $\log x = -1.5414$

วิธีทำ

1) $\log x = 4.4586$

จาก $\log x = 4.4586$

เขียนในรูปผลบวกของค่าแมนทิสซากับค่าแคแรกเทอริสติกของ $\log x$

จะได้ $\log x = 0.4586 + 4$

หาจำนวนจริง N ที่ทำให้ $\log N = 0.4586$ มีวิธีการหาดังนี้

เปรียบเทียบระยะห่าง จะได้

$$0.01\left\{\begin{array}{l} d\left\{\begin{array}{ll} \log 2.87 & = 0.4579 \\ \log N & = 0.4586 \end{array}\right\}0.0007 \\ \quad\;\; \log 2.88 \quad = 0.4594 \end{array}\right\}0.0015$$

เขียนสัดส่วนได้ดังนี้

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0007}{0.0015}$$

$$d = \frac{0.0007 \times 0.01}{0.0015}$$

$$d = 0.005$$

จะได้ $N = 2.87 + 0.005$

$$N = 2.875$$

ดังนั้น $\log 2.875 = 0.4586$

จะได้ว่า $\log x = \log 2.875 + \log 10^4$

$$\log x = \log (2.875 \times 10^4)$$

$$\log x = \log 28{,}750$$

แอนติลอการิทึม จะได้ $x = 28,750$

ดังนั้น $x = 28,750$

2) $\log x = -1.5414$

จาก $\log x = -1.5414$

จะได้ $\log x = (-1 - 0.5414 + 2) - 2 = 0.4586 - 2$

เขียนในรูปผลบวกของค่าแมนทิสซากับค่าแคแรกเทอริสติกของ $\log x$

จะได้ $\log x = 0.4586 - 2$

$\log x = \log 2.875 + \log 10^{-2}$

$\log x = \log (2.875 \times 10^{-2})$

$\log x = \log 0.02875$

แอนติลอการิทึม จะได้ $x = 0.02875$

ดังนั้น $x = 0.02875$

3.5 การแก้สมการลอการิทึม

สมการของลอการิทึม หมายถึง สมการที่มีพจน์อย่างน้อยหนึ่งพจน์อยู่ในรูปลอการิทึมของตัวแปร

คำตอบของสมการลอการิทึม หมายถึง จำนวนจริงที่เมื่อนำไปแทนตัวแปรในสมการที่กำหนดให้แล้วจะได้ประโยคที่เป็นจริง

ขั้นตอนในการแก้สมการลอการิทึม มีดังนี้

1. การจัดรูป log ให้อยู่ในรูปยกกำลัง โดยใช้สมบัติที่ว่า

   $\log_a x = y$ ก็ต่อเมื่อ $x = a^y$

2. เมื่อเปลี่ยนเป็นเลขยกกำลังแล้ว ให้ใช้สมบัติของลอการิทึมที่ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง กล่าวคือ

   $\log_a x_1 = \log_a x_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$ และ $x_1 > 0$ และ $x_2 > 0$

3. หลังจากแก้สมการได้ค่าของตัวแปรแล้ว จะต้องตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าเป็นจริง หรือเท็จ

การแก้สมการลอการิทึม นอกจากขั้นตอนข้างต้นแล้วยังต้องอาศัยต่างๆ ของลอการิทึม มาช่วยแก้ปัญหาด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 23 จงแก้สมการ $\log(3x^2+2x-4)=0$

วิธีทำ จากสมการ $\log(3x^2+2x-4)=0$

จัดรูปให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้

$$(3x^2+2x-4)=10^0$$

$$3x^2+2x-4=1$$

$$3x^2+2x-5=0$$

$$(3x+5)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{5}{3},1$$

ตรวจสอบ แทน $x=-\frac{5}{3}$ ใน $\log(3x^2+2x-4)=0$

จะได้ $$\log(3\left(-\frac{5}{3}\right)^2+2\left(-\frac{5}{3}\right)-4)=0$$

$$\log(\frac{25}{3}-\frac{10}{3}-\frac{12}{3})=0$$

$$\log 1=0$$

$0=0$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x=1$ ใน $\log(3x^2+2x-4)=0$

จะได้ $$\log(3(1)^2+2(1)-4)=0$$

$$\log(3+2-4)=0$$

$$\log 1 = 0$$

$$0 = 0 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $x = -\frac{5}{3}$ หรือ $x = 1$

ตัวอย่างที่ 24 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_3(x-1) - \log_3(2x+1) = -1$

วิธีทำ จากสมการ $\log_3(x-1) - \log_3(2x+1) = -1$

ใช้สมบัติของลอการิทึม จะได้

$$\log_3\left(\frac{x-1}{2x+1}\right) = -1$$

จัดรูปให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้

$$\frac{x-1}{2x+1} = 3^{-1}$$

$$\frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{3}$$

$$3x-3 = 2x+1$$

$$x = 4$$

ตรวจสอบ แทน $x = 4$ ใน $\log_3(x-1) - \log_3(2x+1) = -1$

จะได้ $\log_3(4-1) - \log_3(2(4)+1) = -1$

$$\log_3 3 - \log_3 9 = -1$$

$$\log_3 3 - \log_3 3^2 = -1$$

$$1 - 2 = -1$$

$$-1 = -1 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{4\}$

ตัวอย่างที่ 25 จงหาคำตอบของสมการ $\log_4 \log_3 \log_2 (x^2 - 2x) = 0$

วิธีทำ จากสมการ $\log_4 \log_3 \log_2 (x^2 - 2x) = 0$

จัดให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้

$$\log_3 \log_2 (x^2 - 2x) = 1$$

$$\log_2 (x^2 - 2x) = 3$$

$$x^2 - 2x = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = 4, -2$$

ตรวจสอบ แทน $x = 4$ ในสมการ $\log_4 \log_3 \log_2 (x^2 - 2x) = 0$

จะได้ $\log_4 \log_3 \log_2 ((4)^2 - 2(4)) = 0$

$$\log_4 \log_3 \log_2 8 = 0$$

$$f \log_4 \log_3 \log_2 2^3 = 0$$

$$\log_4 \log_3 3 = 0$$

$$\log_4 1 = 0$$

$0 = 0$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x = -2$ ในสมการ $\log_4 \log_3 \log_2 (x^2 - 2x) = 0$

จะได้ $\log_4 \log_3 \log_2 ((-2)^2 - 2(-2)) = 0$

$$\log_4 \log_3 \log_2 8 = 0$$

$$\log_4 \log_3 \log_2 2^3 = 0$$

$$\log_4 \log_3 3 = 0$$

$$\log_4 1 = 0$$

$0 = 0$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{-2, 4\}$

นอกจากตัวอย่างข้างต้น ยังมีตัวแปรที่สามารถเป็นฐานของลอการิทึม ซึ่งมีวิธีการหาคำตอบเหมือนกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 26 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log_x 32^{-1} = -\frac{5}{2}$

วิธีทำ จากสมการ $\log_x 32^{-1} = -\frac{5}{2}$

จะได้ $-\log_x 32 = -\frac{5}{2}$

$$\log_x 32 = \frac{5}{2}$$

จัดให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง จะได้

$$x^{\frac{5}{2}} = 32$$

ใช้สมบัติเลขยกกำลัง จะได้

$$x^{\frac{5}{2}} = (2)^5$$

$$((x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}} = ((2)^5)^{\frac{2}{5}}$$

ดังนั้นจะได้ $x = 2^2 = 4$

ตรวจสอบ แทน $x = 4$ ในสมการ $\log_x 32^{-1} = -\frac{5}{2}$

จะได้ $\log_4 32^{-1} = -\frac{5}{2}$

$$\log_{2^2} 2^{-5} = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2}\log_2 2 = -\frac{5}{2}$$

$-\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{4\}$

ตัวอย่างที่ 27 จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^{\log_{x^2} 9} = 2x^2 - 11x + 15$

วิธีทำ จากสมการ $x^{\log_{x^2} 9} = 2x^2 - 11x + 15$

ใช้สมบัติของลอการิทึม จะได้

$$x^{\frac{1}{2}\log_x 9} = 2x^2 - 11x + 15$$

$$x^{\log_x 9^{\frac{1}{2}}} = 2x^2 - 11x + 15$$

$$9^{\frac{1}{2}} = 2x^2 - 11x + 15$$

$$3 = 2x^2 - 11x + 15$$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$(2x-3)(x-4) = 0$$

$$x = \frac{3}{2}, 4$$

ตรวจสอบ แทน $x = \frac{3}{2}$ ในสมการ $9^{\frac{1}{2}} = 2x^2 - 11x + 15$

เพราะว่า $x^{\log_{x^2} 9} = 9^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $$9^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 11\left(\frac{3}{2}\right) + 15$$

$$3 = \frac{9}{2} - \frac{33}{2} + \frac{30}{2}$$

$$3 = \frac{6}{2}$$

$3 = 3$ เป็นจริง

ตรวจสอบ แทน $x = 4$ ในสมการ $9^{\frac{1}{2}} = 2x^2 - 11x + 15$

จะได้ $9^{\frac{1}{2}} = 2(4)^2 - 11(4) + 15$

$3 = 32 - 44 + 15$

$3 = 3$

$3 = 3$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{\frac{3}{2}, 4\right\}$

3.6 การประยุกต์

ในหัวข้อนี้เป็นการนำเอาความรู้เรื่องฟังก์ชันลอการิทึมไปประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆ ได้แก่ ฟิสิกส์ เคมี เศรษฐศาสตร์ เช่น ปริมาณสารกัมมันตภาพรังสีที่กำลังสลายตัว ความเข้มของเสียง ระดับความเป็นกรดเป็นด่างของสารละลาย เป็นต้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี ที่มีครึ่งชีวิต h วัน หาปริมาณสารที่เหลืออยู่โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$m(t) = m_0 e^{-rt}$

เมื่อ $m(t)$ แทน ปริมาณของสารกัมมันตภาพรังสีที่เหลืออยู่ เมื่อเวลาผ่านไป t วัน

m_0 แทน ปริมาณของสารกัมมันตภาพรังสี ณ จุดเริ่มต้น

$r = \frac{\ln 2}{h}$

ตัวอย่างที่ 28 ธาตุโปโลเนียม มีครึ่งชีวิต 140 วัน ถ้าเดิมมีธาตุโปโลเนียมอยู่ 300 มิลลิกรัม จงหา

1) ปริมาณของธาตุโปโลเนียมที่เหลืออยู่ เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี

2) ใช้เวลานานกี่วัน จึงจะมีธาตุโปโลเนียมเหลืออยู่ 100 มิลลิกรัม

วิธีทำ 1) จากสูตร $m(t) = m_0 e^{-rt}$

ในที่นี้ $m_0 = 300$ และ $t = 730$

และ $$r = \frac{\ln 2}{h}$$

$$= \frac{\ln 2}{140}$$

$$\approx \frac{0.6931}{140}$$

$$\approx 0.00495$$

จะได้ $$m(730) = 300e^{-0.00495 \times 730}$$

$$\approx 8.087$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี มีธาตุโปโลเนียม เหลืออยู่ประมาณ 8 มิลลิกรัม

2) จากสมการ $m(t) = m_0 e^{-rt}$

ในที่นี้ $m(t) = 100$

$$100 = 300e^{-0.00495t}$$

$$\frac{1}{3} = e^{-0.00495t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -0.00495t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0.00495}$$

$$\approx 202.02$$

ดังนั้น ธาตุโปโลเนียมจะเหลือ 100 มิลลิกรัม เมื่อเวลาผ่านไปประมาณ 202 วัน

การวัดระดับความเข้มเสียง เป็นการวัดความเข้มเสียงโดยเทียบกับความเข้มเสียงที่หูคนปกติเริ่มได้ยินเป็นเกณฑ์อ้างอิง สามารถหาระดับความเข้มเสียง โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

เมื่อ β แทน ระดับความเข้มเสียงมีหน่วยเป็นเดซิเบล

I แทน ความเข้มเสียงที่ต้องการวัด

I_0 แทน ความเข้มเสียงที่หูคนปกติเริ่มได้ยิน ซึ่งเท่ากับ 10^{-12} วัตต์ / ตารางเมตร

ตัวอย่างที่ 29 จงหาระดับความเข้มเสียงของเครื่องบินไอพ่น ซึ่งขณะกำลังบินขึ้นสู่ท้องฟ้ามีความเข้มเสียง 1,000 วัตต์ / ตารางเมตร

วิธีทำ จากสูตร $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$

ในที่นี้ $I = 1{,}000$

$$\beta = 10 \log \frac{1{,}000}{10^{-12}}$$

$$= 10 \log 10^{16}$$

$$= 160$$

ดังนั้น ระดับความเข้มเสียงเท่ากับ 160 เดซิเบล

ระดับความเป็นกรดเป็นด่าง (pH) ของสารละลายสามารถคำนวณหาโดยอาศัยสูตรต่อไปนี้

$$pH = -\log[H^+]$$

เมื่อ pH แทน ระดับความเป็นกรดเป็นด่างของสารละลาย

$[H^+]$ แทน ความเข้มข้นของประจุไฮโดรเจนในสารละลาย 1 ลิตร มีหน่วยเป็นโมล

โดยสารละลายที่มีค่า $pH = 7$ เป็นสารละลายที่มีความเป็นกลาง

$pH < 7$ เป็นสารละลายที่มีความเป็นกรด

$pH > 7$ เป็นสารละลายที่มีความเป็นด่าง

ตัวอย่างที่ 30 กลุ่มตัวอย่างเลือดของคนคนหนึ่งมีความเข้มของประจุไฮโดรเจน H^{+} เท่ากับ 2.50×10^{-4} โมล จงหาค่า pH พร้อมทั้งพิจารณาความเป็นกรดเป็นด่างของกลุ่มตัวอย่าง

วิธีทำ จากสูตร $pH = -\log[H^{+}]$

ในที่นี้ $[H^{+}] = 2.50 \times 10^{-4}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} pH &= -\log\left(2.50 \times 10^{-4}\right) \\ &= -\log 2.50 + 4 \\ &\approx 3.602 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $pH < 7$ ดังนั้น กลุ่มตัวอย่างเลือดมีความเป็นกรด

3.7 สรุป

ฟังก์ชันลอการิทึมมีความสำคัญมากในชีวิตประจำวัน ซึ่งจะต้องศึกษารายละเอียดทั้งความหมายของฟังก์ชันลอการิทึม สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ ซึ่งความรู้เหล่านี้เป็นพื้นฐานในการนำมาประยุกต์ไม่ว่าจะเป็นด้านวิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงเขียนเลขยกกำลังต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปลอการิทึม

    1) $3^4 = 81$

    2) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

    3) $(5)^3 = 125$

    4) $\left(\sqrt{3}\right)^4 = 9$

    5) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

2. จงเขียนลอการิทึมที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

    1) $\log_4 64 = 3$

    2) $\log_8 512 = 3$

    3) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

    4) $\log_5 5 = 1$

    5) $\log_{10} 0.0001 = -4$

3. จงหาค่าของ

    1) $\log_3 243$

    2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

    3) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$

    4) $\log_{10} 1000$

    5) $\log_5 5\sqrt{5}$

4. จงหาค่า a จากสมการต่อไปนี้

   1) $\log_4 a = 5$

   2) $\log_a 625 = 5$

   3) $\log_3 (a+5) = 6$

   4) $\log_{5\sqrt{5}} \frac{1}{625} = a$

   5) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{49} = a$

5. กำหนดให้ $\log 6 = 0.7781$ และ $\log 18 = 1.2553$ จงหาค่าของ $\log 2 + \log 3$

6. จงหาค่าของ

   1) $\log 2\frac{2}{5} + \log 2\frac{1}{7} - \log 5\frac{1}{7}$

   2) $7\log\frac{15}{16} - 3\log\frac{81}{80} + 5\log\frac{24}{25} + \log 20$

   3) $\left(\log_3 9\right)\left(\log_4 16\right) - \log_{10} 8 + 3\log_{10} 20$

   4) $2^{2\log_2 6 + \log_2 12}$

   5) $\log\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}$

   6) $8^{1-\log_8 2 + \log_2 3}$

7. กำหนดให้ log ของจำนวน 896 มีค่าแมนทิสซา เป็น 0.9523 จงหาค่าของ

   1) $\log 0.0000896$

   2) $\log 0.0896$

   3) $\log 8960000$

   4) $\log 89.6$

   5) $\log\left(0.896 \times 10^{-3}\right)$

8. จงแก้สมการต่อไปนี้

   1) $\log x = 2\log 4 + \log 32$

   2) $\log(3x+2) = \log(x-1) + 1$

   3) $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

   4) $\log(3x+5) + 3 = \log(2x+1)$

   5) $\log_2(\log_3 x) = 4$

9. ธาตุซีเซียม -137 มีชีวิต 30 ปี ถ้ามีธาตุซีเซียมที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 100 กรัม จงหา

   1) จงหาปริมาณของซีเซียมที่เหลือเมื่อเวลาผ่านไป t ปี

   2) จงหาปริมาณของซีเซียมที่เหลือเมื่อเวลาผ่านไป 50 ปี

   3) จะใช้เวลานานกี่ปี จึงจะมีซีเซียมเหลืออยู่ 35 กรัม

10. ถ้าสารกัมมันตภาพรังสีจำนวน 150 กรัม สลายตัวเหลืออยู่ 350 มิลลิกรัม ในเวลา 36 ชั่วโมง จงหาครึ่งชีวิตของสารนี้

11. ถ้าระดับความเข้มของเสียงรถบรรทุกเท่ากับ 78 เดซิเบล รถบรรทุกคันนี้จะมีความเข้มเสียงกี่วัตต์ต่อตารางเมตร

เอกสารอ้างอิง

กวิยา เนาวประทีป. (2556). **เลขยกกำลัง ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม**. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ้นเตอร์. กรุงเทพฯ.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2557) **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4—6. (พิมพ์ครั้งที่ 6)**. กรุงเทพฯ:สกสค. ลาดพร้าว.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

เนื้อหาประจำบท

บทที่ 4 ตรีโกณมิติเบื้องต้น

4.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

4.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4.3 การประยุกต์

4.4 สรุป

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อศึกษาบทที่ 4 แล้วนักศึกษาสามารถ

1. บอกอัตราส่วนตรีโกณมิติ
2. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. นำตรีโกณมิติมาประยุกต์ใช้

กิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนอธิบายเนื้อหาแต่ละเรื่องและซักถามความเข้าใจพร้อมยกตัวอย่างประกอบการบรรยาย ไฟล์พาวเวอร์พอยนต์
2. ผู้เรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป เรื่อง ตรีโกณมิติเบื้องต้น
3. ผู้เรียนและผู้สอนร่วมกันอภิปรายและหาข้อสรุปร่วมกัน
4. ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดบทที่ 4
5. ทดสอบย่อยหลังจบบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป
2. ไฟล์เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป
3. ไฟล์พาวเวอร์พอยนต์ เรื่อง ตรีโกณมิติเบื้องต้น
4. หนังสืออ่านประกอบค้นคว้าเพิ่มเติม
5. แบบฝึกหัดบทที่ 4

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากการซักถามผู้เรียน
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม
3. สังเกตจากความสนใจ
4. สังเกตจากการอภิปรายกลุ่มย่อยและอภิปรายสรุป
5. ประเมินจากการทำแบบฝึกหัด
6. ประเมินจากการสอบระหว่างภาคและปลายภาค

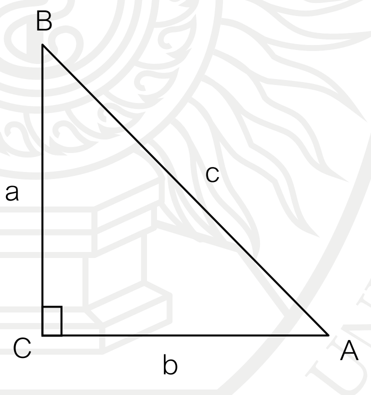
บทที่ 4
ตรีโกณมิติเบื้องต้น

คำว่า ตรีโกณมิติ(Trigonometry) หมายถึง การวัดรูปสามเหลี่ยม วิชาตรีโกณมิติเกิดจากความจำเป็นในการวัดระยะทาง มุม และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยวิธีปกติ ในสมัยก่อนจึงมีการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น ต่อมาได้มีการพัฒนาและศึกษาอย่างกว้างขวางยิ่งขึ้น รวมถึงการนำความรู้เรื่องตรีโกณมิติมาใช้ในชีวิตประจำวันได้ ซึ่งต่อไปนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานเกี่ยวกับตรีโกณมิติดังนี้

4.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

4.1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ ความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ภาพที่ 4.1 แสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

เมื่อกำหนดให้ a แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A

b แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม B

c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม C

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เมื่อพิจารณาที่มุม A จะได้

$\overline{AB}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาว c หน่วย

$\overline{BC}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วย

$\overline{AC}$ เรียกว่า ด้านประชิดมุม A ยาว b หน่วย

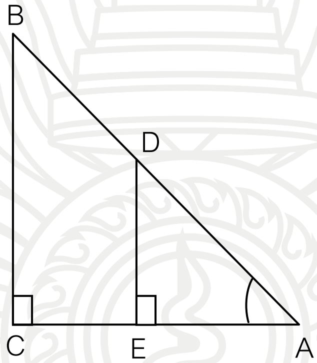
เมื่อพิจารณาที่มุม B จะได้

$\overline{AB}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาว c หน่วย

$\overline{AC}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม B ยาว b หน่วย

$\overline{BC}$ เรียกว่า ด้านประชิดมุม B ยาว a หน่วย

ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยม 2 รูป คือ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADE ดังภาพ



ภาพที่ 4.2 แสดงความสัมพันธ์ รูปสามเหลี่ยมคล้าย

จากภาพจะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADE คล้ายกัน และมีมุม A เป็นมุมเดียวกัน จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่าอัตราส่วนของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่สมนัยกันจะมีค่าเท่ากัน ดังนี้

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

สรุปได้ว่า เมื่อมุม A มีค่าคงตัว อัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ จะมีค่าคงตัว จากเหตุผลดังกล่าวทำให้สามารถนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยพิจารณาจากภาพที่ 4.1 ได้ดังนี้

บทนิยาม 1 อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เรียกว่า ไซน์ (Sine) ของมุม A เขียนแทนด้วย sinA

นั่นคือ $\sin A = \dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{a}{c}$

บทนิยาม 2 อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เรียกว่า โคไซน์ (Cosine) ของมุม A เขียนแทนด้วย $\cos A$

นั่นคือ $$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c}$$

บทนิยาม 3 อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านประชิดมุม A เรียกว่า แทนเจนต์ (Tangent) ของมุม A เขียนแทนด้วย $\tan A$

นั่นคือ $$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

นอกจากอัตราส่วนตรีโกณมิติของไซน์และโคไซน์ดังกล่าวข้างต้นแล้ว ยังมีค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติอื่นๆ ที่หาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4 อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เป็นส่วนกลับของ $\sin A$ เรียกว่า โคเซกแคนต์ (Cosecant) ของมุม A เขียนแทนด้วย $\operatorname{cosec} A$

นั่นคือ $$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{c}{a}$$

บทนิยาม 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เป็นส่วนกลับของ $\cos A$ เรียกว่า เซกแคนต์ (Secant) ของมุม A เขียนแทนด้วย $\sec A$

นั่นคือ $$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$$

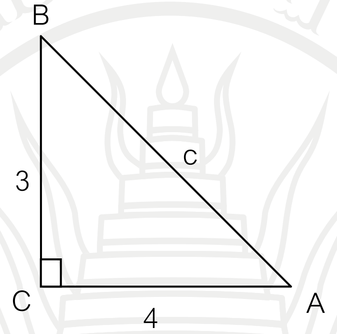
บทนิยาม 6 อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เป็นส่วนกลับของ $\tan A$ เรียกว่า โคแทนเจนต์ (Cotangent) ของมุม A เขียนแทนด้วย $\tan A$

นั่นคือ $$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a} = \frac{\cos A}{\sin A}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก โดยมี $BC = 3$ หน่วย และ $AC = 4$ หน่วย จงหาค่าของ $\sin A, \cos A$ และ $\tan A$

วิธีทำ กำหนดให้ c แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

จะได้



ภาพที่ 4.3 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 1

โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้
$$
\begin{aligned}
c^2 &= 3^2 + 4^2 \\
&= 9 + 16 \\
&= 25 \\
c &= 5 \text{ หน่วย}
\end{aligned}
$$

จะได้ $\sin A = \dfrac{3}{5}$

$\cos A = \dfrac{4}{5}$

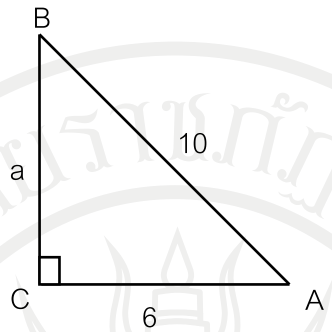
และ $\tan A = \dfrac{3}{4}$

ดังนั้น $\sin A = \dfrac{3}{5}$, $\cos A = \dfrac{4}{5}$ และ $\tan A = \dfrac{3}{4}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก และ $AC = 6$ หน่วย $AB = 10$ หน่วย จงหาค่าของ

1) $\sin A$	2) $\cos A$	3) $\tan A$
4) $\sin B$	5) $\cos B$	6) $\tan B$

วิธีทำ กำหนดให้ a แทนความยาวตรงข้ามมุม A



ภาพที่ 4.4 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 2

โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$

$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$= 10^2 - 6^2$$
$$= 100 - 36$$
$a = 8$ หน่วย

จะได้ว่า 1) $\sin A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

2) $\cos A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

3) $\tan A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

4) $\sin B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

5) $\cos B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

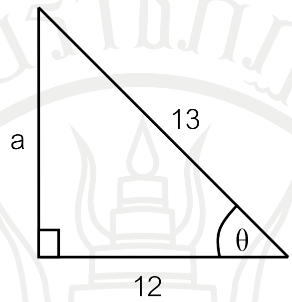
6) $\tan B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

ดังนั้น $\sin A = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5}, \tan A = \frac{4}{3}, \sin B = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{4}{5}$

และ $\tan B = \frac{3}{4}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ และ $\cos\theta = \frac{12}{13}$ จงหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\tan\theta$

วิธีทำ เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{12}{13}$ ได้ดังนี้



ภาพที่ 4.5 แสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

จากรูปจะได้ว่า $a^2 = 13^2 - 12^2$

$$= 169 - 144$$

$$= 25$$

$$a = 5$$

จะได้ว่า $\sin\theta = \frac{5}{13}$

$\tan\theta = \frac{5}{12}$

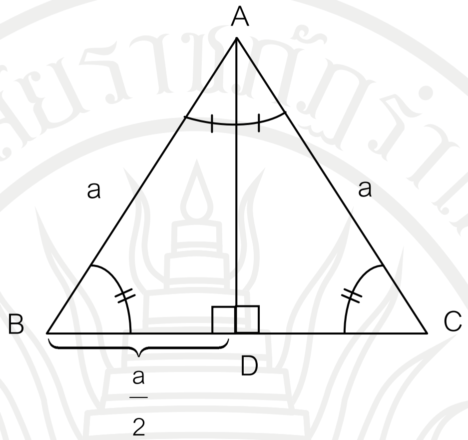
ดังนั้น $\sin\theta = \frac{5}{13}$ และ $\tan\theta = \frac{5}{12}$

4.1.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60°

ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมต่างๆ สามารถใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในการพิจารณาความสัมพันธ์ของด้านต่างๆของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ได้ดังนี้

4.1.2.1 การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60° โดยใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

สำหรับการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60° สามารถหาได้ดังนี้ พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาว a หน่วย ดังนี้



ภาพที่ 4.6 แสดงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC

เมื่อลาก $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด D จะได้ $\overline{BD}$ ยาว $\frac{a}{2}$ หน่วย และ

มุม $ABD = 60^\circ$ และมุม $BAD = 30^\circ$

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BD^2 \\ &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3a^2}{4} \\ AD &= \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ และ $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$

$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sec 30^\circ = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

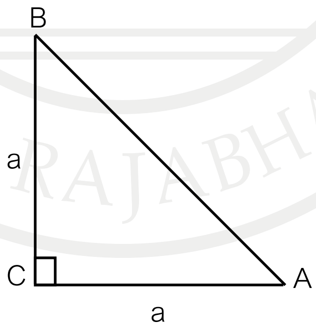
$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{และ} \qquad \cot 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{และ} \qquad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \text{และ} \qquad \sec 60^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \qquad \text{และ} \qquad \cot 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

สำหรับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 45° สามารถหาได้ดังนี้
พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก
ถ้ามุม $A = 45^\circ$ แล้วมุม $B = 45^\circ$ และ $AC = BC$
กำหนดให้ $AC = BC = a$ หน่วย ดังนี้



ภาพที่ 4.7 แสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เมื่อ $A = 45^\circ$ และ $B = 45^\circ$

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$= a^2 + a^2$$

$$= 2a^2$$

$$AB = \sqrt{2}a$$

ดังนั้น $\sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$

$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$ และ $\cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

2) $\sec 30^\circ - \tan 30^\circ$

3) $\operatorname{cosec} 60^\circ + 2\tan 30^\circ$

4) $5\cot 45^\circ - \tan 60^\circ$

วิธีทำ

1) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\sec 30^\circ - \tan 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\operatorname{cosec} 60^\circ + 2\tan 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

4) $5\cot 45^\circ - \tan 60^\circ = 5(1) - \sqrt{3} = 5 - \sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของข้อต่อไปนี้

1) $\cot^2 45^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 30^\circ \sec^2 45^\circ$

2) $\sin^3 60^\circ \cot 30^\circ - 2\sec^2 45^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ$

3) $3\tan^2 30^\circ - \frac{1}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 30^\circ$

วิธีทำ

1) $\cot^2 45^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 30^\circ \sec^2 45^\circ$

$$= (1)^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot 2} = 4$$

2) $\sin^3 60^\circ \cot 30^\circ - 2\sec^2 45^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{3}\right) - 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1)$$

$$= \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{8} - \frac{8}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9 - 32 + 12}{8} = -\frac{11}{8}$$

3) $3\tan^2 30^\circ - \frac{1}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 30^\circ$

$$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{3} - \frac{3}{12} - \frac{4}{4} + \frac{12}{12}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{3}{4}$$

นอกจากนี้มุมอื่นๆ ที่ไม่สามารถใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้การหาแล้ว เราสามารถที่จะใช้ตารางของอัตราส่วนตรีโกณมิติในการค่าต่างๆได้ ดังหัวข้อต่อไปนี้

4.1.2.2 การหาค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากตาราง

การหาค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมอื่นๆ ที่อยู่ระหว่าง 0° ถึง 90° สามารถหาได้จากตาราง โดยที่ค่าของไซน์ และโคไซน์ จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ดังตารางต่อไปนี้

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
1°	.017	.999	.017
2°	.035	.999	.035
3°	.052	.999	.052
4°	.070	.998	.070
5°	.087	.996	.087
6°	.105	.995	.105
7°	.122	.993	.123
8°	.139	.990	.141
9°	.156	.988	.158
10°	.174	.85	.176
11°	.191	.982	.194
12°	.208	.978	.213
13°	.225	.974	.231
14°	.242	.970	.249
15°	.259	.966	.268
16°	.276	.961	.287

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
45°	.707	.707	1.000
46°	.719	.695	1.036
47°	.731	.682	1.072
48°	.743	.669	1.111
49°	.755	.656	1.150
50°	.766	.643	1.192
51°	.777	.629	1.235
52°	.788	.616	1.280
53°	.799	.602	1.327
54°	.809	.588	1.376
55°	.819	.574	1.428
56°	.829	.559	1.483
57°	.839	.545	1.540
58°	.848	.530	1.6000
59°	.857	.515	1.664
60°	.866	.500	1.732

θ	sinθ	cosθ	tanθ
17°	.292	.956	.306
18°	.309	.951	.325
19°	.326	.946	.344
20°	.342	.940	.364
21°	.358	.934	.384
22°	.375	.927	.404
23°	.391	.921	.424
24°	.407	.914	.445
25°	.423	.906	.466
26°	.438	.899	.488
27°	.454	.891	.510
28°	.469	.883	.532
29°	.485	.875	.554
30°	.500	.866	.577
31°	.515	.857	.601
32°	.530	.848	.625
33°	.545	.839	.649
34°	.559	.829	.675
35°	.574	.819	.700
36°	.588	.809	.727
37°	.602	.799	.754
38°	.616	.788	.781

θ	sinθ	cosθ	tanθ
61°	.875	.485	1.804
62°	.883	.469	1.881
63°	.891	.454	1.963
64°	.899	.438	2.050
65°	.906	.423	2.145
66°	.914	.407	2.246
67°	.921	.391	2.356
68°	.927	.375	2.475
69°	.934	.358	2.605
70°	.940	.342	2.748
71°	.946	.326	2.904
72°	.951	.309	3.078
73°	.956	.292	3.271
74°	.961	.276	3.487
75°	.966	.259	3.732
76°	.970	.242	4.011
77°	.974	.225	4.331
78°	.978	.208	4.705
79°	.982	.191	5.145
80°	.985	.174	5.671
81°	.988	.156	6.314
82°	.990	.139	7.115

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
39°	.629	.777	.810
40°	.643	.766	.839
41°	.656	.755	.869
42°	.669	.743	.900
43°	.682	.731	.933
44°	.695	.719	.966

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
83°	.993	.122	8.144
84°	.995	.105	9.514
85°	.996	.087	11.430
86°	.998	.070	14.301
87°	.999	.052	19.081
88°	.999	.035	28.636
89°	.999	.018	57.290

ตารางที่ 4.1 ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่อยู่ระหว่าง 0° และ 90°

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

1) $\sin 12^\circ$ 2) $\cos 12^\circ$

3) $\sin 21^\circ$ 4) $\cos 21^\circ$

5) $\sin 39^\circ$ 6) $\cos 39^\circ$

7) $\tan 22^\circ$ 8) $\tan 75^\circ$

9) $\sin 88^\circ$ 10) $\tan 89^\circ$

วิธีทำ จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า

1) $\sin 12^\circ \approx 0.208$ 2) $\cos 12^\circ \approx 0.978$

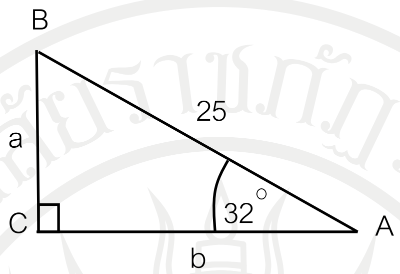
3) $\sin 21^\circ \approx 0.358$ 4) $\cos 21^\circ \approx 0.934$

5) $\sin 39^\circ \approx 0.629$ 6) $\cos 39^\circ \approx 0.777$

7) $\tan 22^\circ \approx 0.404$ 8) $\tan 75^\circ \approx 3.732$

9) $\sin 88^\circ \approx 0.999$ 10) $\tan 89^\circ \approx 57.290$

ตัวอย่างที่ 7 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่กำหนด จงหาค่าของ a และ b



ภาพที่ 4.8 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 7

วิธีทำ จากรูป $\sin 32^\circ = \dfrac{a}{25}$

ดังนั้น $a = 25\sin 32^\circ$

จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\sin 32^\circ \approx 0.530$

จะได้ $a \approx 25 \times 0.530$

$a \approx 13.25$ หน่วย

และจากรูป $\cos 32^\circ = \dfrac{b}{25}$

ดังนั้น $b = 25\cos 32^\circ$

จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\cos 32^\circ \approx 0.848$

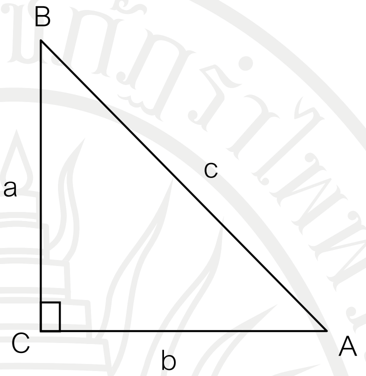
จะได้ $b \approx 25 \times 0.848$

$b \approx 21.20$

นั่นคือ $a \approx 13.25$ หน่วย และ $b \approx 21.20$ หน่วย

4.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ในมุมต่าง ๆ

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



ภาพที่ 4.9 แสดงภาพประกอบหัวข้อ 4.1.3

จะเห็นว่า 1) $\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$ ดังนั้น $\sin A = \cos B$

2) $\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$ ดังนั้น $\cos A = \sin B$

3) $\tan A = \frac{a}{b}$ แต่ $\tan B = \frac{b}{a}$ ดังนั้น $\tan A = \frac{1}{\tan B}$

และจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังกล่าวจะพบว่า

$A = 90^\circ - B$ และ $B = 90^\circ - A$

ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างไซน์และโคไซน์ ดังนี้

เนื่องจาก $\sin A = \cos B$ ดังนั้น $\sin A = \cos(90^\circ - A)$

เนื่องจาก $\cos A = \sin B$ ดังนั้น $\cos A = \sin(90^\circ - A)$

เนื่องจาก $\tan A = \frac{1}{\tan B}$ ดังนั้น $\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $\sin 20^\circ \approx 0.342$ และ $\cos 20^\circ \approx 0.940$ จงหาค่าของ

1) $\sin 70^\circ$ 2) $\cos 70^\circ$

3) $\tan 20^\circ$ 4) $\tan 70^\circ$

วิธีทำ 1) $\sin 70^\circ$

เนื่องจาก $\sin A = \cos(90^\circ - A)$

ดังนั้น $\sin 70^\circ = \cos(90^\circ - 70^\circ)$

$= \cos 20^\circ$

≈ 0.940

นั่นคือ $\sin 70^\circ \approx 0.940$

2) $\cos 70^\circ$

เนื่องจาก $\cos A = \sin(90^\circ - A)$

ดังนั้น $\cos 70^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ)$

$= \sin 20^\circ$

≈ 0.342

นั่นคือ $\cos 70^\circ \approx 0.342$

3) $\tan 20^\circ$

เนื่องจาก $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos B}$

ดังนั้น $\tan 20^\circ = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$\approx \dfrac{0.342}{0.940}$

≈ 0.364

นั่นคือ $\tan 20^\circ \approx 0.364$

4) $\tan 70^\circ$

เนื่องจาก $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos B}$

ดังนั้น $\tan 70^\circ = \dfrac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}$

$$\approx \frac{0.940}{0.342}$$

$$\approx 2.749$$

นั่นคือ $\tan 70^\circ \approx 2.749$

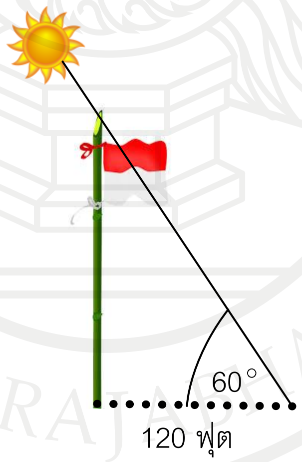
4.1.4 การหาความสูงและระยะทางโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันเกี่ยวกับเรื่อง ระยะทาง ความสูง ที่ไม่สามารถหาได้โดยตรง เช่น การหาความสูงของภูเขา ความสูงของเสาธง ความกว้างของแม่น้ำ ความสูงของตึก เป็นต้น การหามุม ณ จุดๆ หนึ่งบนพื้นราบกับสิ่งที่ต้องหาความสูง จำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติเข้าไปช่วยจะทำให้การแก้ปัญหาได้ง่ายยิ่งขึ้น

ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่มักจะนำมาใช้ช่วยแก้ปัญหา ได้แก่ ค่าของ $\sin\theta$ $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9 ขณะที่ดวงอาทิตย์ทำมุม 60° กับพื้นราบ ความยาวของเงาของเสาธงต้นหนึ่งวัดได้ 120 ฟุต จงหาว่าเสาธงสูงกี่ฟุต

วิธีทำ กำหนดให้ h แทนความสูงของเสาธง(ฟุต)



ภาพที่ 4.10 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 9

จากรูป จะได้ว่า $\tan 60^\circ = \frac{h}{120}$

เนื่องจาก $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

ดังนั้นจะได้ว่า $\sqrt{3} = \frac{h}{120}$

$h = 120\sqrt{3}$ ฟุต

นั่นคือ ความสูงของเสาธง เท่ากับ $120\sqrt{3}$ ฟุต

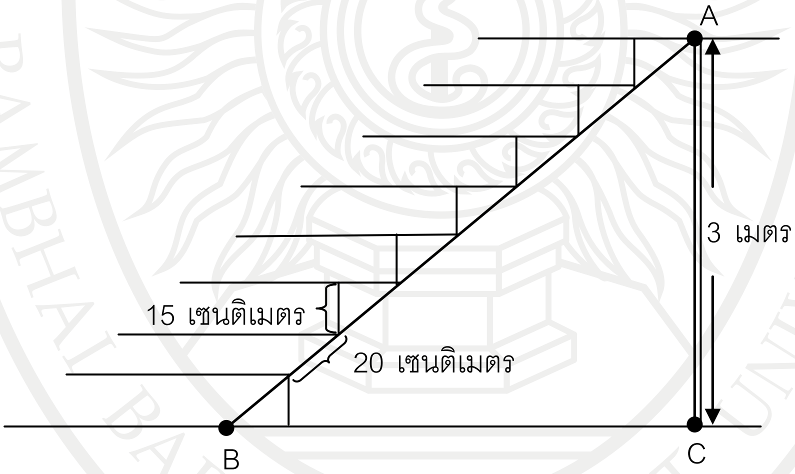
ตัวอย่างที่ 10 ตึกสองชั้นหลังหนึ่งมีพื้นล่างต่ำกว่าชั้นบน 3 เมตร มีบันไดทอดเดียว ขั้นบันไดแต่ละขั้นกว้าง 20 เซนติเมตร และสูงกว่ากัน 15 เซนติเมตร จงหาว่าบันไดยาวเท่าไร และบันไดทำมุมกับพื้นกี่องศา (กำหนด $\tan 37^\circ \approx 0.754$)

วิธีทำ กำหนดให้ AB แทนความยาวของบันไดจากพื้นชั้นล่างถึงพื้นชั้นบน

AC แทนความสูงระหว่างพื้นชั้นล่างกับชั้นบน

BC แทนความยาวระหว่างปลายบันไดถึงพื้นชั้นล่างที่ตั้งฉากกับพื้นชั้นบน

ดังรูป



ภาพที่ 4.11 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 10

จากรูป จะได้ว่า $AC = 3$ เมตร

เนื่องจาก บันไดแต่ละขั้นมีความสูงขั้นละ 15 เซนติเมตร

ดังนั้น จะได้ว่ามีบันไดจำนวน $\frac{300}{15} = 20$ ขั้น

และ บันไดแต่ละขั้นมีความกว้างขั้นละ 20 เซนติเมตร หรือ 0.2 เมตร

ดังนั้น ความยาวระหว่างปลายบันไดกับพื้นชั้นล่าง $0.2 \times 20 = 4$ เมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$= 4^2 + 3^2$$

$$= 16 + 9$$

$$= 25$$

$$AB = 5$$

ดังนั้น บันไดมีความยาวเท่ากับ 5 เมตร

จากรูป อัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่บันไดทำมุมกับพื้น ได้ดังนี้

$$\frac{AC}{BC} = \tan B$$

$$\frac{3}{4} = \tan B$$

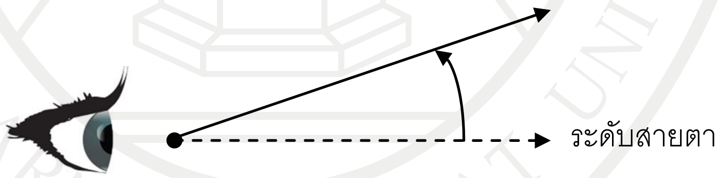
$$\tan B = 0.75$$

$$B = 37^{\circ}$$

ดังนั้น บันไดทำมุมกับพื้น 37 องศา

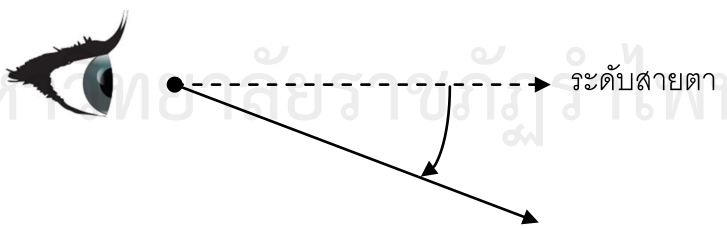
หมายเหตุ

1. มุมใดที่แขนของมุมยกจากแนวระดับสายตา(แนวนอน) ขึ้นไปด้านบน เรียกว่า “มุมเงย” ดังรูป



ภาพที่ 4.12 แสดงมุมเงย

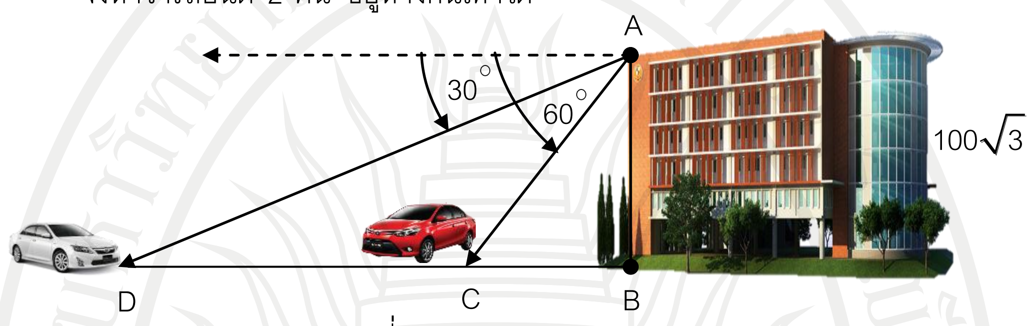
2. มุมใดที่แขนของมุมกดลงจากระดับแนวนอน เรียกว่า “มุมก้ม” ดังรูป



ภาพที่ 4.13 แสดงมุมก้ม

ตัวอย่างที่ 11 บนดาดฟ้าของอาคารเรียนหลังหนึ่งซึ่งสูง $100\sqrt{3}$ เมตร เพชรยืนอยู่ที่มุมตึกบนดาดฟ้า มองเห็นรถยนต์ 2 คัน ที่จอดอยู่ห่างไกลจากอาคารเรียนมากเป็นมุมก้ม 60° และ 30° ตามลำดับ จากเส้นระดับสายตาเดียวกัน จงหาว่ารถยนต์ 2 คัน อยู่ห่างกันเท่าใด

วิธีทำ



ภาพที่ 4.14 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 11

จากรูป จะได้ว่า $\tan D = \dfrac{100\sqrt{3}}{BD}$

นั่นคือ $\tan 30^\circ = \dfrac{100\sqrt{3}}{BD}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{BD}$$

ดังนั้น $BD = 100\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 300$ เมตร

นั่นคือ ระยะทางระหว่างอาคารเรียนถึงรถคันที่ไกลสุดเท่ากับ 300 เมตร

จากรูป จะได้ว่า $\tan C = \dfrac{100\sqrt{3}}{BC}$

นั่นคือ $\tan 60^\circ = \dfrac{100\sqrt{3}}{BC}$

$$\sqrt{3} = \frac{100\sqrt{3}}{BC}$$

ดังนั้น $BD = \dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= 100$ เมตร

นั่นคือ ระยะทางระหว่างอาคารเรียนถึงรถคันถัดมาเท่ากับ 100 เมตร

จะได้ว่า $CD = BD - BC$

$= 300 - 100$

$= 200$

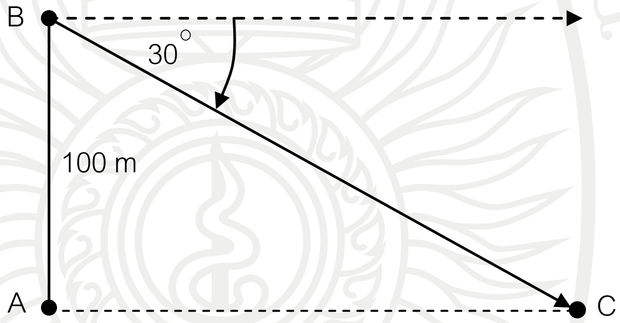
ดังนั้น รถยนต์ 2 คัน อยู่ห่างกัน 200 เมตร

ตัวอย่างที่ 12 ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 เมตร มองเห็นกองหินบนพื้นดินเบื้องล่าง ในแนวเดียวกับเชิงผาเป็นมุมก้ม 30 องศา จงหาว่ากองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผา กี่เมตร

วิธีทำ ให้ AB แทนความสูงของหน้าผา

C แทนตำแหน่งของก้อนหิน

ดังรูป



ภาพที่ 4.15 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 12

จากรูป จะได้ว่า $\tan C = \frac{AB}{AC}$

$$AC = \frac{AB}{\tan C}$$

$$AC = \frac{100}{\tan 30^\circ}$$

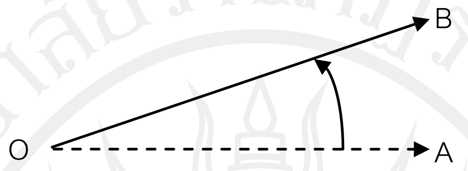
$$AC = 100\sqrt{3} \text{ เมตร}$$

ดังนั้น กองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผาเท่ากับ $100\sqrt{3}$ เมตร

4.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4.2.1 มุมและการวัดมุม

ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง รอบจุด O ไปในแนว $\overline{OB}$ สิ่งที่เกิดขึ้นเรียกว่า มุม



ภาพที่ 4.16 แสดงการวัดมุมรอบจุด O

ส่วนประกอบที่เกี่ยวข้องกับมุมดังนี้

เรียกจุด O ว่า จุดยอดมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง OA ว่า ด้านเริ่มต้นของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง OB ว่า ด้านสิ้นสุดของมุม

มุมในตำแหน่งมาตรฐาน

มุมในตำแหน่งมาตรฐาน หมายถึง มุมในระบบพิกัดฉากที่มีจุดยอดมุมอยู่ที่จุดกำเนิด และด้านเริ่มต้นของมุมคือแกน X ทางด้านบวก โดยมีข้อตกลงในการวัดขนาดของมุมดังนี้

ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง ทวนเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นบวก

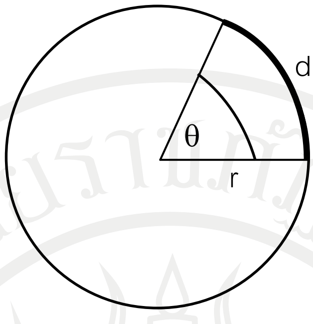
ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง ตามเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นลบ

หน่วยการวัดมุมแบ่งออกเป็น 2 หน่วย

1. หน่วยเป็นองศา สัญลักษณ์แทนองศา $\circ$ โดยกำหนดให้มุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบ 1 รอบ มีขนาด 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อย คือ ลิปดา ($'$) และ ฟิลิปดา ($''$)

โดยที่ $1^{\circ} = 60'$ และ $1' = 60''$

2. หน่วยเรเดียน กำหนดให้มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นมีขนาด 1 เรเดียน ดังรูป



ภาพที่ 4.17 แสดงการวัดมุมของวงกลมเป็นหน่วยเรเดียน

สำหรับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว d หน่วย จะมีขนาดเท่ากับ $\frac{d}{r}$ เรเดียน และถ้าให้ขนาดของมุมเป็น θ เรเดียน จะได้ว่า $\theta = \frac{d}{r}$

จากวงกลมที่มีรัศมี r หน่วย จะได้ความยาวของเส้นรอบวงเท่ากับ $2\pi r$ หน่วย มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จึงมีขนาดเท่ากับ $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ เรเดียน

ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและเรเดียน

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกาครบ 1 รอบ จะมีขนาดของมุมเท่ากับ 2π เรเดียน ซึ่งถ้าวัดเป็นองศามุมของวงกลม 1 วงเท่ากับ 360 องศา

จะได้ว่า $2\pi = 360^\circ$

$$\pi = 180^\circ$$

ดังนั้นเมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุมในอีกหน่วยได้เช่นกัน

โดยทั่วไปการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนมักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ ดังนั้น ถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ ให้ถือว่ามุมนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 13 จงเปลี่ยน 75° เป็นหน่วยเรเดียน

วิธีทำ จาก $180^{\circ} = \pi$ เรเดียน

จะได้ $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

$75^{\circ} = \frac{75\pi}{180}$ เรเดียน

$= \frac{5\pi}{12}$ เรเดียน

ดังนั้น $75^{\circ} = \frac{5\pi}{12}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 14 จงเปลี่ยน -120° เป็นหน่วยเรเดียน

วิธีทำ จาก $180^{\circ} = \pi$ เรเดียน

จะได้ $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

$-120^{\circ} = -\frac{120\pi}{180}$ เรเดียน

$= -\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน

ดังนั้น $-120^{\circ} = -\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 15 จงเปลี่ยน $\frac{7\pi}{3}$ เรเดียน เป็นหน่วยองศา

วิธีทำ จาก $\pi = 180^{\circ}$

จะได้ $\frac{7\pi}{3} = \frac{7 \times 180}{3}$ องศา

$= 7 \times 60$ องศา

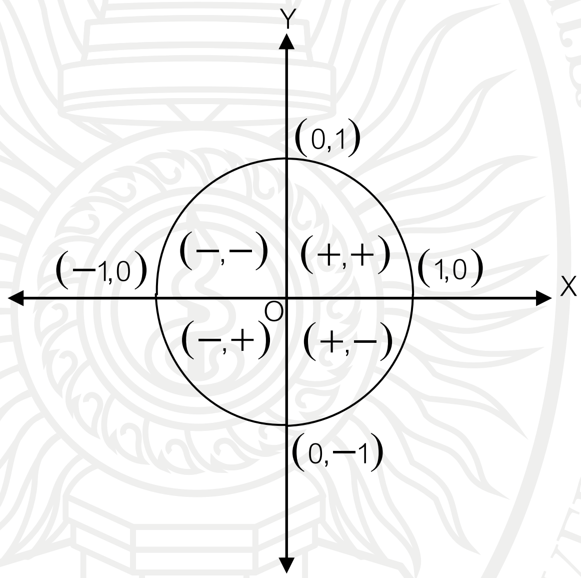
$= 420$ องศา

ดังนั้น $\frac{7\pi}{3} = 420$ องศา

เนื่องจากมุมที่กล่าวถึงในที่นี้ เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปจากแนวเดิม ซึ่งการหมุนส่วนของเส้นตรงนั้นมีได้สองแบบ คือ หมุนทวนเข็มนาฬิกาและหมุนตามเข็มนาฬิกา การบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรงทวนเข็มนาฬิกาจะแสดงขนาดของมุมเป็นบวก ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรงตามเข็มนาฬิกาจะแสดงขนาดของมุมเป็นจำนวนลบ ซึ่งจะพิจารณาการหมุนส่วนของเส้นตรง 1 รอบ ดังหัวข้อต่อไปนี้

4.2.2 วงกลมหนึ่งหน่วย

วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และรัศมี 1 หน่วย



ภาพที่ 4.18 แสดงวงกลมหนึ่งหน่วย มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$

จากรูป แบ่งวงกลมออกเป็น 4 ส่วน ได้แก่

1. ควอดรันต์ 1 เขียนแทนด้วย Q_1 ที่มีค่า x และ y เป็นบวก หรือ $(+,+)$
2. ควอดรันต์ 2 เขียนแทนด้วย Q_2 ที่มีค่า x เป็นลบ และ y เป็นบวก หรือ $(-,+)$
3. ควอดรันต์ 3 เขียนแทนด้วย Q_3 ที่มีค่า x และ y เป็นลบ หรือ $(-,-)$
4. ควอดรันต์ 4 เขียนแทนด้วย Q_4 ที่มีค่า x เป็นบวก และ y เป็นลบ หรือ $(+,-)$

ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย

ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย จะเป็นไปตามสมการ $2\pi r = 2\pi$ หน่วยหรือประมาณ $2 \times 3.1416... \approx 6.283$

ดังนั้น ครึ่งวงกลมหนึ่งหน่วยยาว $\frac{2\pi}{2} = \pi$ หน่วยหรือประมาณ 3.142

เสี้ยววงกลมหนึ่งหน่วยยาว $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ หน่วยหรือประมาณ 1.571

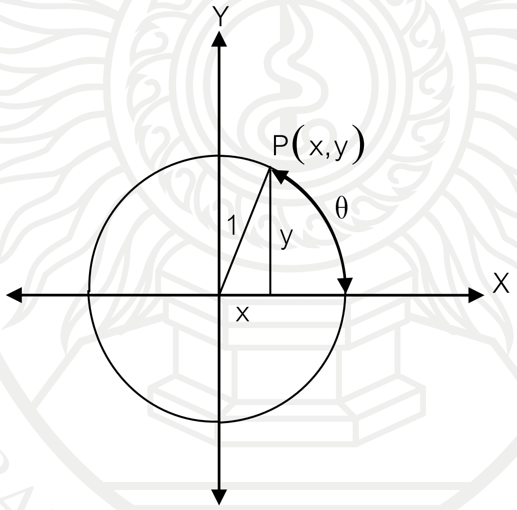
การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

กำหนด $\theta \in \mathbb{R}$ จุด $P(\theta)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยวัดจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลม

ถ้า $\theta > 0$ หมายถึง การวัดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta < 0$ หมายถึง การวัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

จุด $P(x,y)$ ในเส้นรอบวงของวงกลม เรียกว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ดังรูป



ภาพที่ 4.19 แสดงจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จากรูปจะพบว่า เมื่อวัดความยาวส่วนโค้งไปยาว θ หน่วย จะมีจุด $P(x,y)$ เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยนี้

ดังนั้นจึงสามารถสร้างฟังก์ชันจากเซตของความยาวส่วนโค้งไปยังเซตของจุดปลายส่วนโค้งได้ดังนี้

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะได้ว่า

$$x = \cos\theta$$

$$y = \sin\theta$$

เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$

ดังนั้น $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

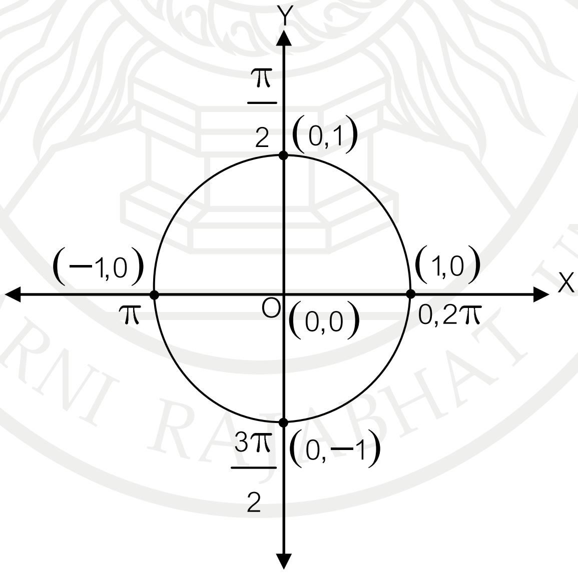
จะเห็นว่าค่าของ $-1 \leq y \leq 1$ และ $-1 \leq x \leq 1$

ดังนั้นค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จะมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 และ โดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือ เซตของจำนวนจริง

4.2.3 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีความยาวเส้นรอบวงเท่ากับ 2π หน่วย ดังนั้นสามารถหาความยาวส่วนโค้งที่จุดหลักๆ ได้ดังนี้



ภาพที่ 4.20 แสดงความยาวส่วนโค้งที่จุดหลักๆ ของวงกลมหนึ่งหน่วย

ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1,0)$ ไปยาว θ หน่วย จะได้ว่า

$$x=\cos\theta \text{ และ } y=\sin\theta$$

จากรูป จะได้ว่า

$$\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \text{และ} \quad \cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin\pi=0 \quad \text{และ} \quad \cos\pi=-1$$

$$\sin\frac{3\pi}{2}=-1 \quad \text{และ} \quad \cos\frac{3\pi}{2}=0$$

$$\sin2\pi=0 \quad \text{และ} \quad \cos2\pi=1$$

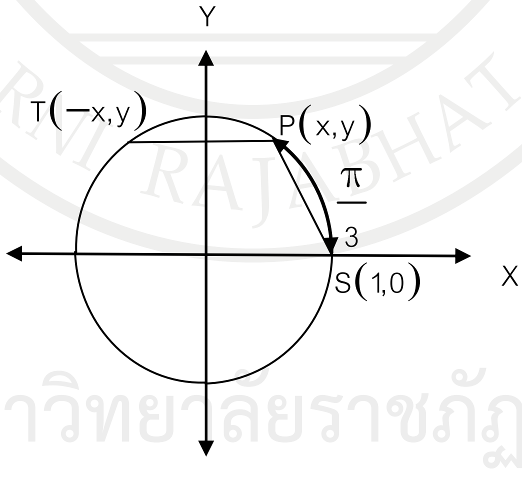
นั่นคือ ถ้าทราบความยาวส่วนโค้งและจุดปลายของส่วนโค้งดังกล่าวจะทำให้สามารถหาค่าของไซน์และโคไซน์ ของจำนวนจริง θ นั้นได้เสมอ

4.2.4 การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}$ และ $\frac{\pi}{6}$

ในที่นี้จะแสดงวิธีการหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}$ และ $\cos\frac{\pi}{3}$ โดยพิจารณาจากวงกลมหนึ่งหน่วยได้ดังนี้

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}$ และ $\cos\frac{\pi}{3}$

จากจุด $S(1,0)$ วัดความยาวส่วนโค้งในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ให้มีจุดปลายที่จุด $P(x,y)$ ดังรูป



ภาพที่ 4.21 แสดงความยาวส่วนโค้งในทิศทางทวนเข็มนาฬิกายาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จากรูป จะได้ว่า $x=\cos\frac{\pi}{3}$ และ $y=\sin\frac{\pi}{3}$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง SP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

และให้ จุด T สมมาตรกับ จุด P โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้น จะได้ว่า $T(-x,y)$ และส่วนโค้งของ PT ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ว่า คอร์ด SP ยาวเท่ากับ คอร์ด PT

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+x)^2+(y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y)^2}=\sqrt{(2x)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$(x-1)^2+y^2=4x^2$$

$$x^2-2x+1+y^2=4x^2$$

เนื่องจาก $x^2+y^2=1$ จะได้ว่า

$$4x^{2x}+2x-2=0$$

$$2x^2+x-1=0$$

$$(2x-1)(x+1)=0$$

$$x=\frac{1}{2},-1$$

เนื่องจาก (x,y) อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ดังนั้นค่าของ x และ y เป็นบวกทั้งคู่

ดังนั้น $x=\frac{1}{2}$

ต่อไปหาค่าของ y โดยการแทนค่า $x=\frac{1}{2}$ ใน $x^2+y^2=1$

จะได้ว่า $\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

นอกจากนี้ ยังสามารถหาค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่นๆ ได้อีก โดยอาศัยจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\sin\frac{2\pi}{3}$ 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$

3) $\sin\frac{4\pi}{3}$ 4) $\cos\frac{4\pi}{3}$

5) $\sin\frac{5\pi}{3}$ 6) $\cos\frac{5\pi}{3}$

7) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ เนื่องจากค่าของไซน์และโคไซน์จะมีค่าเหมือน จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย แต่จะต่างกันตรงเครื่องหมายว่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับว่าจุดปลายส่วนโค้งยาวถึงควอดรันต์ที่เท่าไร

1) $\sin\frac{2\pi}{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos\frac{2\pi}{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

3) $\sin\frac{4\pi}{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos\frac{4\pi}{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

5) $\sin\frac{5\pi}{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\cos\frac{5\pi}{3}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

7) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

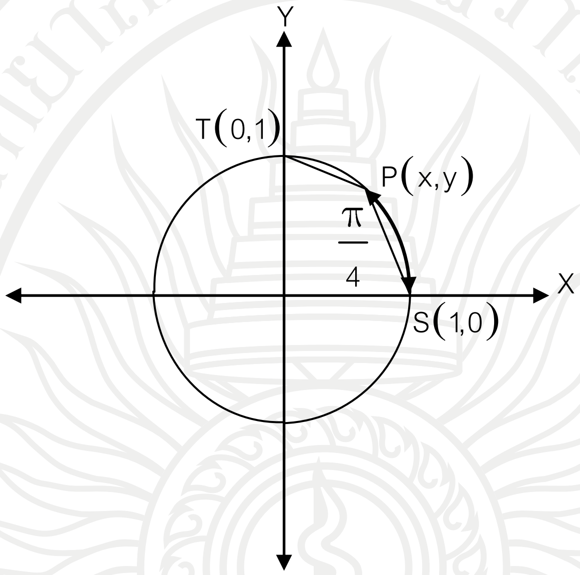
ดังนั้น $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}$

จากจุด $S(1,0)$ วัดความยาวส่วนโค้งในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย ให้มีจุดปลายที่จุด $P(x,y)$ ดังรูป



ภาพที่ 4.22 แสดงความยาวส่วนโค้งในทิศทางทวนเข็มนาฬิกายาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จากรูป จะได้ว่า $x = \cos\frac{\pi}{4}$ และ $y = \sin\frac{\pi}{4}$

เนื่องจาก ความยาวส่วนโค้งของ ST ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ความยาวส่วนโค้งของ PT ยาว $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ หน่วย

นั่นคือ คอร์ดของ SP ยาวเท่ากับคอร์ดของ PT

ทำให้ได้ว่า $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$-2x = -2y$$

$$x = y$$

เนื่องจากจุด $P(x,y)$ เป็นจุดอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย

ดังนั้น $x^2 + y^2 = 1$

ทำให้ได้ว่า $x^2 + x^2 = 1$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

แต่จุด $P(x,y)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 จะได้ว่า ค่าของ x และ y เป็นบวกทั้งคู่

จะได้ว่า $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

นั่นคือ $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

นอกจากนี้ ยังสามารถหาค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่นๆ ได้อีก โดยอาศัยจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$ 2) $\cos\frac{3\pi}{4}$

3) $\sin\frac{5\pi}{4}$ 4) $\cos\frac{5\pi}{4}$

5) $\sin\frac{7\pi}{4}$ 6) $\cos\frac{7\pi}{4}$

7) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

วิธีทำ เนื่องจากค่าของไซน์และโคไซน์จะมีค่าเหมือน จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย แต่จะต่างกันตรงเครื่องหมายว่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับว่าจุดปลายส่วนโค้งยาวถึงควอดรันต์ที่เท่าไร

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\cos\frac{3\pi}{4}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\sin\frac{5\pi}{4}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\cos\frac{5\pi}{4}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\sin\frac{7\pi}{4}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\cos\frac{7\pi}{4}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}$

ทำนองเดียวกันกับการหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นอกจากนี้ ยังสามารถหาค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่นๆ ได้อีกโดยอาศัยจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\sin\frac{5\pi}{6}$ 2) $\cos\frac{5\pi}{6}$

3) $\sin\frac{7\pi}{6}$ 4) $\cos\frac{7\pi}{6}$

5) $\sin\frac{11\pi}{6}$ 6) $\cos\frac{11\pi}{6}$

7) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เนื่องจากค่าของไซน์และโคไซน์จะมีค่าเหมือน จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย แต่จะต่างกันตรงเครื่องหมายว่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับว่าจุดปลายส่วนโค้งยาวถึงควอดรันต์ที่เท่าไร

1) $\sin\frac{5\pi}{6}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

2) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin\dfrac{7\pi}{6}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

4) $\cos\dfrac{7\pi}{6}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\sin\dfrac{11\pi}{6}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

6) $\cos\dfrac{11\pi}{6}$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นบวก

ดังนั้น $\cos\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

8) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 จะได้ว่าค่าของโคไซน์เป็นบวก

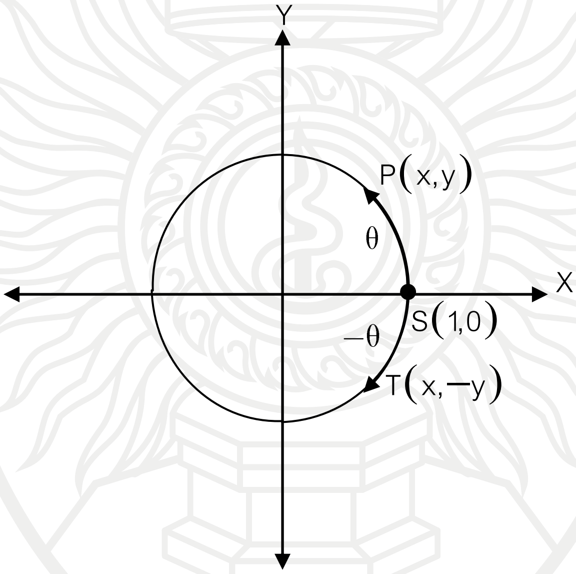
ดังนั้น $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงวิธีการหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนบ้างแล้ว จะเห็นว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริง θ มาให้ การหาค่าฟังก์ชันไซน์โคไซน์ของ θ ทำได้โดยหา (x,y) ซึ่งมีจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ถ้าใช้แกน X เป็นแกนสมมาตรของวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ถ้าส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เชื่อมระหว่างจุด $(1,0)$ กับจุด (x,y) ยาว $|\theta|$ หน่วย แล้วส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เชื่อมระหว่างจุด $(1,0)$ กับจุด $(x,-y)$ ต้องยาว $|\theta|$ หน่วยด้วย ดังนั้นเมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด (x,y) แล้ว จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย คือจุด $(x,-y)$

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงในรูป $-\theta$

พิจารณาจากรูป



ภาพที่ 4.23 แสดงความยาวส่วนโค้งในทิศทางตามเข็มนาฬิกายาว θ หน่วย

จากรูป กำหนดให้ $P(x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จะได้ว่า $x=\cos\theta$ และ $y=\sin\theta$ ________ (1)

ใช้แกน X เป็นแกนสมมาตร พับกราฟให้จุด P ทับบนจุด T

ดังนั้น ส่วนโค้งของ ST ยาวเท่ากับ $-\theta$ หน่วย และ

มีจุดปลายส่วนโค้งที่จุด $(x,-y)$

จะได้ว่า $x=\cos(-\theta)$ และ $-y=\sin(-\theta)$ ________ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad \text{และ} \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่าของ

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

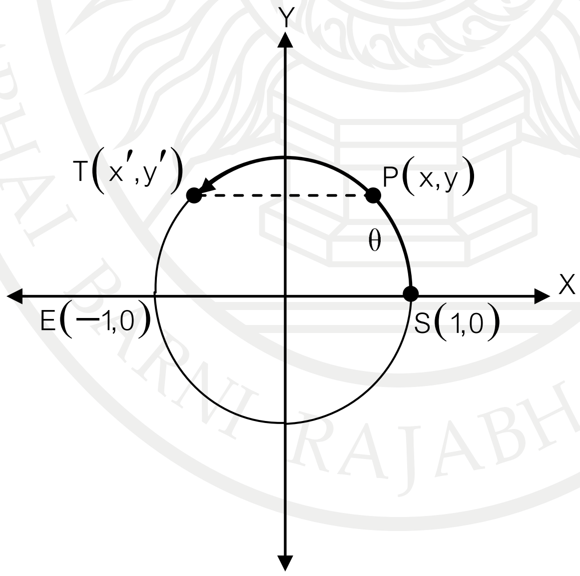
วิธีทำ

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 2



ภาพที่ 4.24 แสดงจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

ให้ $T(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $x'=\cos\theta$ และ $y'=\sin\theta$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง SE ยาว π หน่วย ส่วนโค้ง TE จึงยาว $\pi-\theta$ หน่วย

ให้ จุด $P(x,y)$ สมมาตรกับจุด $T(x',y')$

โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้น ส่วนโค้ง SP ยาว $\pi-\theta$ หน่วยด้วย และ $y=y'$ และ $-x=x'$

เมื่อ จุด $P(x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\pi-\theta$ หน่วย

ดังนั้น $x=\cos(\pi-\theta)$ และ $y=\sin(\pi-\theta)$

นั่นคือ $\cos\theta=-\cos(\pi-\theta)$ และ $\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่าของ $\sin\frac{5\pi}{6}$ และ $\cos\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$

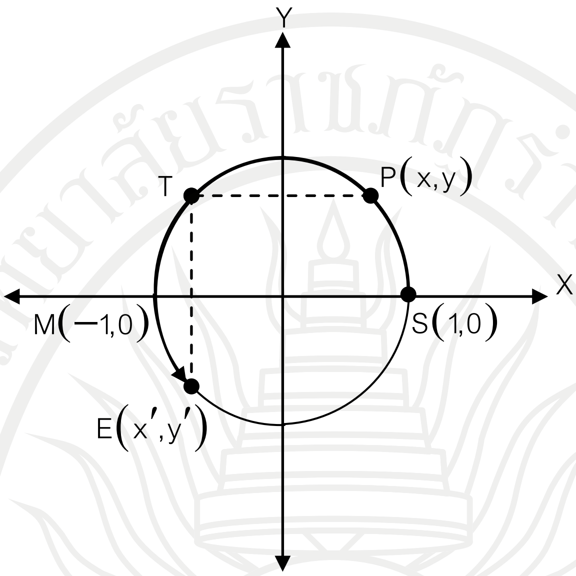
$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 3



ภาพที่ 4.25 จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

ให้ $E(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $x' = \cos\theta$ และ $y' = \sin\theta$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง SM ยาว π หน่วย ส่วนโค้ง ME จึงยาว $\theta - \pi$ หน่วย

ให้ จุด T สมมาตรกับจุด $E(x',y')$ โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

จุด $P(x,y)$ สมมาตรกับจุด T โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้น ส่วนโค้ง SP ยาว $\theta - \pi$ หน่วย และ $x' = -x$ และ $y' = -y$

จะได้ว่า $x = \cos(\theta - \pi)$ และ $y = \sin(\theta - \pi)$

นั่นคือ $\sin\theta = -\sin(\theta - \pi)$ และ $\cos\theta = -\cos(\theta - \pi)$

ตัวอย่างที่ 21 จงหาค่าของ $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{6}}{\sin\frac{7\pi}{6}} + \sin\frac{5\pi}{4}$

วิธีทำ $$\frac{\cos\frac{7\pi}{6}}{\sin\frac{7\pi}{6}} + \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{6}}{\sin\frac{7\pi}{6}} + \sin\dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดให้ $\sin\frac{\pi}{12} = 0.26, \cos\frac{\pi}{12} = 0.96$ จงหาค่า $\sin\frac{13\pi}{12}$ และ $\cos\frac{13\pi}{12}$

วิธีทำ $\sin\frac{13\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)$

$$= -\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= -0.26$$

ดังนั้น $\sin\frac{13\pi}{12} = -0.26$

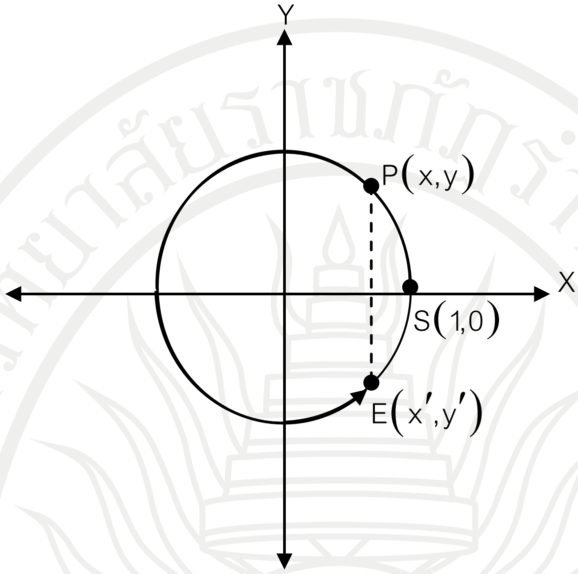
$$\cos\frac{13\pi}{12} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{12}$$

$$= -0.96$$

ดังนั้น $\cos\frac{13\pi}{12} = -0.96$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 4



ภาพที่ 4.26 แสดงจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

ให้ $E(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $x' = \cos\theta$ และ $y' = \sin\theta$

เนื่องจาก เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

จะได้ว่า ส่วนโค้งของ SE ยาว $2\pi - \theta$ หน่วย

ให้ จุด $P(x,y)$ สมมาตรกับจุด $E(x',y')$

โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้น ส่วนโค้ง SP ยาว $2\pi - \theta$ หน่วย และ $x' = x$ และ $y' = -y$

จะได้ $x = \cos(2\pi - \theta)$ และ $y = \sin(2\pi - \theta)$

นั่นคือ $\sin\theta = -\sin(2\pi - \theta)$ และ $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าของ $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ

$$\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{5\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

❖ การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในกรณีที่วัดเกิน 1 รอบ

ถ้า $\theta > 2\pi$ และหาร θ ด้วย 2π แล้วผลหารคือ n และเศษคือ α นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \le \alpha < 2\pi$ ดังนั้น การวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1,0)$ ไปยาว θ หน่วย จึงวัดไปเพียง α หน่วยก็เพียงพอแล้ว เพราะจำนวน $2n\pi$ แสดงว่า การวัดต้องวัดครบรอบวงกลม n รอบ จุดปลายส่วนโค้งจะตกที่เดียวกับจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว α เสมอ ดังนั้น $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$ และ $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของ $\cos\frac{21\pi}{4}$

วิธีทำ

$$\cos\frac{21\pi}{4} = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\cos\frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

จากสมบัติข้างต้นนี้จะเห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบได้เสมอ

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่าของ $\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$ และ $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

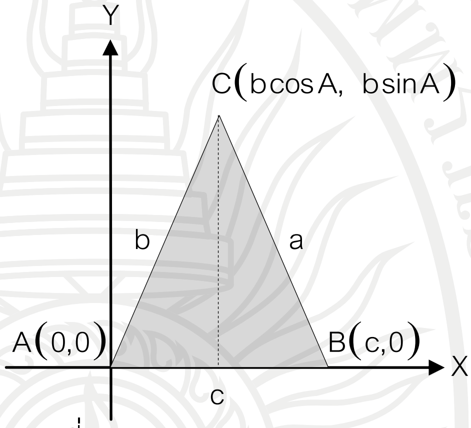
$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) &= -\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)\\ &= -\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{3}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\\ &= -\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.3 การประยุกต์

4.3.1 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

ในการพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีสูตรในการหาพื้นที่คือ ครึ่งหนึ่งของผลคูณระหว่างฐานของรูปสามเหลี่ยมกับความสูงของรูปสามเหลี่ยม แต่บางครั้งอาจจะหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมอาจใช้ความรู้เรื่องตรีโกณมิติมาช่วยในการหาพื้นที่ พิจารณารูปต่อไปนี้



ภาพที่ **4.27** แสดงการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

จากรูป กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$= \frac{1}{2}ca\sin B$$

$$= \frac{1}{2}ab\sin C$$

เนื่องจากการหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ ดังนั้นมีการใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ ได้ดังนี้

กฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

กฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

หรือ

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

ตัวอย่างที่ 26 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A ยาว 3 หน่วย ด้านตรงข้ามมุม C ยาว 5 หน่วย และมุม B กาง 120° จงหาความยาวด้านตรงข้ามมุม B

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

แทนค่า $a=3$ และ $c=5$ และ $\hat{B}=120^\circ$

จะได้

$$b^2=3^2+5^2-2(3\cdot 5)\cos 120^\circ$$

$$b^2=9+25-30\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=49$$

$$b\;=7$$

ดังนั้น ความยาวของด้านตรงข้ามมุม B เท่ากับ 7 หน่วย

ตัวอย่างที่ 27 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ และ $a=1, b=\sqrt{3}$ และ $\hat{A}=30^\circ$ จงหา $\hat{B}$ และ $\hat{C}$

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$a^2=c^2+b^2-2bc\cos A$$

แทนค่า $a=1$ และ $b=\sqrt{3}$ และ $\hat{A}=30^\circ$ จะได้

$$1^2=c^2+\sqrt{3}^2-2\left(c\cdot\sqrt{3}\right)\cos 30^\circ$$

$$1=c^2+3-2\sqrt{3}c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$1=c^2+3-3c$$

$$c^2 - 3c + 2 = 0$$

$$(c-2)(c-1) = 0$$

$$c = 1,\ 2$$

จากกฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin B$$

$$B = 60^\circ, 120^\circ$$

จากกฎของไซน์ จะได้ว่า $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

$$\frac{\sin 30^\circ}{1} = \frac{\sin C}{1}$$

$$\frac{1}{2} = \sin C$$

$$C = 30^\circ$$

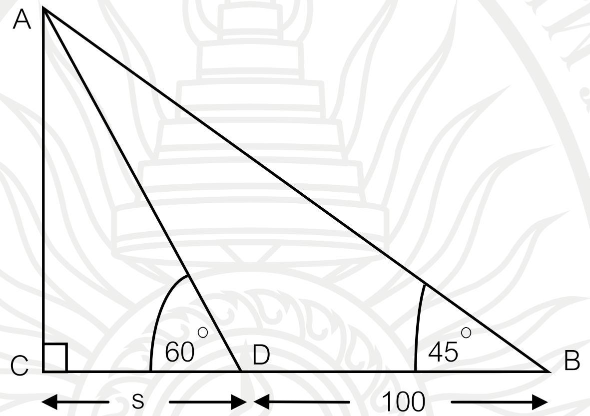
ดังนั้น มุม B มีขนาดเท่ากับ 120 องศา และมุม C มีขนาดเท่ากับ 30 องศา

4.3.2 การหาระยะทางและความสูง

เราใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติในการหาระยะทางหรือความสูงของสิ่งต่างๆ มาแล้วข้างต้น ในทำนองเดียวกันก็สามารถใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาระยะทางและความสูง ซึ่งไม่สามารถจะใช้เครื่องมืออย่างใดอย่างหนึ่งวัดได้โดยตรง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 28 เรือสองลำจอดอยู่ห่างกัน 100 เมตร และจอดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกับประภาคาร ในเรือแต่ละลำมองยอดประภาคารเป็นมุมเงยเป็น 45° และ 60° ตามลำดับ จงหาว่าเรือลำที่จอดอยู่ใกล้ประภาคารจะอยู่ห่างจากประภาคารเท่าไร

วิธีทำ ให้ AC แทนความสูงของประภาคาร และ B และ D แทนตำแหน่งของเรือทั้งสองและ $A\hat{D}C = 60^\circ$ และ $A\hat{B}C = 45^\circ$ ดังรูป



ภาพที่ 4.28 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 28

จากรูป สามเหลี่ยม ABC จะได้ $\frac{AC}{BC} = \tan 45^\circ$

$AC = BC\tan 45^\circ$

$AC = s + 100$ ______(1)

จากรูป สามเหลี่ยม ADC จะได้ $\frac{AC}{DC} = \tan 60^\circ$

$AC = DC\tan 60^\circ$

$AC = s \cdot \sqrt{3}$ ______(2)

จากสมการ (1) = (2) จะได้ $s + 100 = \sqrt{3}s$

$s - \sqrt{3}s = 100$

$\left(\sqrt{3} - 1\right)s = 100$

$s = \frac{100}{\sqrt{3} - 1}$

$s = 50\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$s \approx 50 \times 2.732$

$s \approx 136.6$ เมตร

ดังนั้น เรือลำที่จอดอยู่ใกล้ประภาคารจะอยู่ห่างจากประภาคาร เท่ากับ 136.6 เมตร

ตัวอย่างที่ 29 นายชายนริศออกเดินทางจากโรงเรียนไปร้านขนมเค้กซึ่งอยู่ทางทิศใต้ของโรงเรียนและห่างจากโรงเรียน 5 กิโลเมตร พอรับขนมเค้กแล้วเขาเดินทางต่อไปบ้านเพื่อน ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงไปทางใต้ 25 องศาของโรงเรียนและห่างจากโรงเรียน 3 กิโลเมตร อยากทราบว่าร้านขนมเค้กอยู่ห่างจากบ้านเพื่อนเท่าไร เมื่อกำหนดให้ $\sin 25^{\circ} = 0.42$

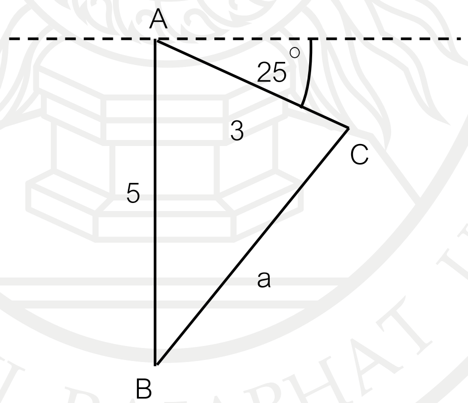
วิธีทำ กำหนดให้ A แทนตำแหน่งของโรงเรียน

B แทนตำแหน่งของร้านขนมเค้ก

C แทนตำแหน่งของบ้านเพื่อน

และให้ a แทนระยะทางจากร้านขนมเค้กไปบ้านเพื่อน

ดังรูป



ภาพที่ 4.29 แสดงภาพประกอบอย่างที่ 29

จากรูป จะเห็นว่า $\cos A = \cos\left(90^{\circ} - 25^{\circ}\right)$

จากสมบัติ $\cos\left(90^{\circ} - \theta\right) = \sin\theta$

ดังนั้น จะได้ว่า $\cos A = \cos\left(90^{\circ} - 25^{\circ}\right) = \sin 25^{\circ} = 0.42$

จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (0.42)$$
$$= 9 + 25 - 12.6$$
$$= 21.4$$
$$a \approx 4.63$$

ดังนั้น ร้านขนมเค้กอยู่ห่างจากบ้านเพื่อนเป็นระยะทางโดยประมาณ 4.63 กิโลเมตร

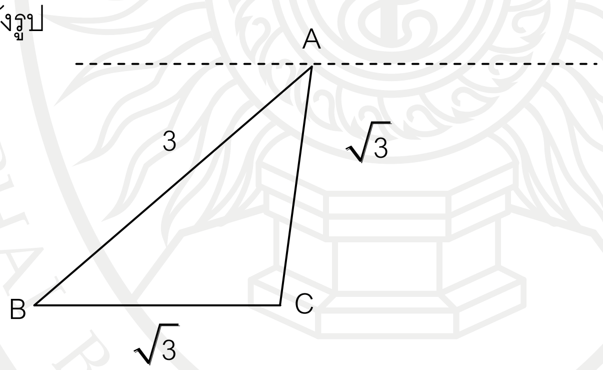
ตัวอย่างที่ 30 เด็กหญิงต้องลมเดินทางจากเมือง A ไปหาเพื่อนที่เมือง B ซึ่งห่างกัน 3 กิโลเมตร แล้วชวนเพื่อนไปทำบุญที่วัดซึ่งอยู่ห่างออกไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทาง $\sqrt{3}$ กิโลเมตร ถ้าเมือง A ห่างจากวัด $\sqrt{3}$ กิโลเมตร จงหาว่าเมือง B อยู่ทิศใดของเมือง A

วิธีทำ กำหนดให้ a แทนความยาวตรงข้ามมุม A

b แทนความยาวตรงข้ามมุม B

c แทนความยาวตรงข้ามมุม C (วัด)

ดังรูป



ภาพที่ 4.30 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 30

จะได้ว่า $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$ และ $c = 3$

จากกฎของโคไซน์จะได้ว่า $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

แทนค่า จะได้ว่า $\sqrt{3}^2 = \sqrt{3}^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos B$

$$3 = 3 + 9 - 6\sqrt{3} \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{9}{6\sqrt{3}}$$

$$\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = 30^{\circ}$$

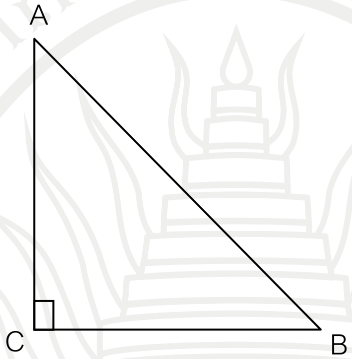
ดังนั้น เมือง B อยู่ทิศตะวันออกเฉียงไปทางเหนือ 30° ของเมือง A

4.4 สรุป

จากหัวข้อข้างต้นจะเห็นว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติมีความสำคัญมาก ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดระยะทาง ความสูง ความกว้าง การหาพื้นที่ เป็นต้น ซึ่งสิ่งเหล่านี้หากไม่มีเครื่องมือแล้วการวัดค่อนข้างลำบากแล้วนั้น วิธีแก้ปัญหาอีกวิธีหนึ่งคือการใช้ความรู้เรื่องตรีโกณมิติมาแก้ไขปัญหา ซึ่งจะต้องรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ มุมที่ใช้วัด สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ รวมถึงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติกรณีที่ไม่สามารถหาค่าได้โดยตรง ต้องใช้ตารางของฟังก์ชันตรีโกณมิติในการแก้ไขปัญหาข้างต้นได้

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงหาค่าอัตราส่วนของความยาวของด้าน ซึ่งเป็นค่า ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุม A และมุม B



1) sin A　　2) cos A　　3) tan A

4) sin B　　5) cos B　　6) tan B

2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม A เป็นมุมฉาก และถ้า $\sin C = \frac{3}{5}$ จงหา $\sin C + \sin B$

3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และถ้า $\tan A = \frac{5}{12}$ แล้ว $\sin A - \cos A$ เท่ากับเท่าใด

4. จงหาค่าของ

1) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \tan 60^\circ$
2) $\sin^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ$
3) $3\tan^3 30^\circ + 4\sin^4 45^\circ + 5\cos^5 60^\circ$
4) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 45^\circ$
5) $2\sin 30^\circ \tan 45^\circ - \cos 30^\circ \tan 30^\circ + 2\tan 60^\circ$
6) $\sin 30^\circ \sec 60^\circ + \tan 60^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ + \operatorname{cosec} 45^\circ \sec 45^\circ$
7) $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - 3\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

5. ถ้า $a\sin30^\circ\cos45^\circ = \tan45^\circ\sin45^\circ$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ มุม $A = 30^\circ$ และ AB ยาว $9\sqrt{3}$ หน่วย จงหาความยาวของ BC, AC และขนาดมุม B

7. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นดิน ณ จุดๆ หนึ่ง มองดูยอดเสาธงเป็นมุมเงย 45° ถ้าชายคนนี้ยืนอยู่ห่างจากเสาธงเป็นระยะทาง 150 เมตร จงหาความสูงของเสาธง

8. นายปกรณ์ยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 ฟุต เห็นกองหินสองกองบนพื้นดินเบื้องล่างในแนวเดียวกันกับเชิงผา ถ้ามุมก้มของกองหินทั้งสองเป็น 60° และ 30° ตามลำดับ จงหาว่ากองหินสองสองนั้นอยู่ห่างกันเท่าไร

9. กำหนดให้ $\sin A = 0.8$ จงหา $\sec A + \cos A - \cot A$

10. จงบอกว่าจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้อยู่ในควอดรันต์ใด

1) $P\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

2) $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

3) $P\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

4) $P\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

5) $P\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

6) $P\left(\frac{25\pi}{3}\right)$

7) $P\left(\frac{29\pi}{6}\right)$

11. จงหาค่าของ

1) $\tan^2\frac{\pi}{4}+4\cos^2\frac{\pi}{3}$

2) $2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{6}$

3) $\cos^2\frac{\pi}{4}-\tan^2\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\sec\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$

4) $\cot^2\frac{\pi}{6}-2\cos^2\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}-4\sin^2\frac{\pi}{6}$

5) $\tan\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

12. จากสมการกราฟของวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2+y^2=1$ หรือ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ ถ้า $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ถ้า $\cos\theta=\frac{5}{13}$ จงหา $\sin\theta$

13. จงเขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ เมื่อ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

3) $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$

4) $\sec(\pi-\theta)$

5) $\cos(\pi+\theta)$

6) $\sin(2\pi-\theta)$

7) $\cot(2\pi+\theta)$

14. จงเปลี่ยนมุมที่วัดเป็นเรเดียนให้เป็นมุมที่วัดเป็นองศา

1) $\frac{4\pi}{3}$

2) $\frac{5\pi}{6}$

3) $-\frac{9\pi}{4}$

4) $-\frac{11\pi}{6}$

5) $\frac{\pi}{15}$

15. จงเปลี่ยนมุมที่วัดเป็นองศาให้เป็นมุมที่วัดเป็นเรเดียน

1) 150°

2) 420°

3) 1125°

4) -330°

5) -390°

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี ด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$ แล้วจงหาขนาดของมุม C

17. จากจุด 2 จุดบนพื้นราบ ห่างจากเสาธงเป็นระยะทาง x และ y เมตร มุมเงยของยอดเสาเป็น a° และ b° ตามลำดับ ถ้ามุมทั้งสองรวมกันเท่ากับหนึ่งมุมฉาก เสาธงสูงเท่าไร

18. ณ จุดหนึ่งบนพื้นราบซึ่งอยู่แนวเดียวกับเชิงเนิน สังเกตเห็นเนินเป็นมุมเงยขึ้น 45° เมื่อเดินขึ้นเนินไปซึ่งเอียงทำมุม 30° กับพื้นราบเป็นระยะทาง 15 เมตร แล้วหยุดสังเกตยอดเนินอีครั้ง คราวนี้เห็นเป็นมุมยกขึ้น 60° จงหาความสูงของเนิน

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2537). **คณิตศาสตร์ ม. 5 เล่ม 1 สารการเรียนรู้เพิ่มเติม.** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กวิยา เนาวประทีป. (2547). **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์: ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.** นครปฐม: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2557) **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4－6. (พิมพ์ครั้งที่ 6).** กรุงเทพฯ:สกสค. ลาดพร้าว.

บรรณานุกรม

กนก จุยคำวงศ์. (2549). **เอกสารประกอบการสอน รายวิชาทฤษฎีสมการ**. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.

กมล เอกไทยเจริญ. (2537). **คณิตศาสตร์ ม. 5 เล่ม 1 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม.** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กวิยา เนาวประทีป. (2547). **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์: ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.** นครปฐม: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

__________. (2556). **ระบบจำนวนจริง**. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ้นเตอร์ .กรุงเทพฯ.

__________. (2556). **เลขยกกำลัง ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม**. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ้นเตอร์. กรุงเทพฯ.

มานัส บุญยัง. (2529). **ทฤษฎีสมการเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

เลิศ สิทธิโกศล. (2540). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** กรุงเทพฯ : สกายบุ๊กส์.

__________. (2540). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2557) **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4—6. (พิมพ์ครั้งที่ 6).** กรุงเทพฯ:สกสค. ลาดพร้าว.

สุขใส ไพบูลย์. (2547). **เอกสารประกอบการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับครูประถมศึกษา**. จันทบุรี. สถาบันราชภัฏรำไพพรรณี จันทบุรี.

Anton Howard.(1992). Multivariable Calculus. New York, Anton Textbook, Inc.

ภาคผนวก

เฉลยแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดบทที่ 1

ข้อที่ 1.

1) จริง
2) จริง
3) เท็จ
4) จริง
5) จริง
6) จริง
7) จริง
8) จริง
9) เท็จ

ข้อที่ 2.

1) 3
2) -8
3) -5

ข้อที่ 3 $a=-3$

ข้อที่ 4 $m=0$

ข้อที่ 5

1) $(x-1)(x-2)(x-3)$
2) $(x-1)(x-2)(x+2)$
3) $(3x-1)(x-3)(x+1)$
4) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)$
5) $(2x-1)(x-3)(x-2)(x-2)$

ข้อที่ 6

1) $1, 2, -1$
2) $2, -3, -1$
3) $2, \frac{1}{2}, -3$

4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1$

5) $-\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}$

ข้อที่ 7

1) จริง

2) จริง

3) จริง

4) เท็จ

5) จริง

6) เท็จ

7) เท็จ

ข้อที่ 8

1) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

2) $[1,3]$

3) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

4) $(-\infty,-2] \cup (3,\infty)$

5) $[-1,\infty)$

6) $(-\infty,1) \cup (2,3)$

ข้อที่ 9

1) $(-\infty,5]$

2) $6, -\frac{4}{5}$

3) $1, -13$

4) ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

ข้อที่ 10

1) $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$

2) $(4,\infty)$

3) $\left[-2,\dfrac{4}{3}\right]$

4) $(5,\infty)$

แบบฝึกหัดที่ 2

ข้อที่ 1

1) 1

2) $\dfrac{16}{9}$

3) 762,939,453,125

4) 7.16

5) 243

6) 441

7) 0.0000097

8) 5

9) 117,649

10) 0.0001

ข้อที่ 2

1) $a^{\frac{3}{4}}$

2) $x^{\frac{7}{4}}$

3) 1

4) $\dfrac{1}{m^{\frac{3}{4}}}$

5) $a^{\frac{1}{3}}$

6) m

7) k^6

8) $a^{\frac{1}{2}}$

9) $\frac{x^2}{y^{\frac{4}{3}}}$

10) $x^{\frac{7}{3}}$

ข้อที่ 3

1) 2

2) $\frac{1}{2}$

3) 10

4) 100

5) 10

ข้อที่ 4

1) $\frac{1}{a}$

2) $\frac{1}{a^2}$

3) $a^{\frac{5}{6}}$

4) a

ข้อที่ 5

1) 2^{3a-7}

2) 25^{a+4}

3) $\frac{7}{43}$

ข้อที่ 6

1) $\sqrt{7}$

2) $\sqrt[3]{4}$

3) $5^{\frac{1}{4}}$

4) $\dfrac{17\sqrt{5}}{5}$

ข้อที่ 7

1) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

2) $7-2\sqrt{6}$

3) $\dfrac{(1-\sqrt{5})-\sqrt{6}}{-2\sqrt{6}}$

4) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}$

ข้อที่ 8

1) $\pm(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

2) $\pm(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

3) $\pm(\sqrt{12}+\sqrt{6})$

4) $\pm(\sqrt{20}-\sqrt{12})$

5) $\pm(\sqrt{7\sqrt{11}}+\sqrt{3+\sqrt{11}})$

6) $\pm(\sqrt{7\sqrt{6}}-\sqrt{2\sqrt{6}})$

7) $\pm(\sqrt{9m}+\sqrt{8n})$

8) $\pm(\sqrt{12m}-\sqrt{2n})$

ข้อที่ 9

1) $\sqrt{3}+1$

2) $\sqrt{3}+1$

3) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

4) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-\sqrt{10}}$

5) 1

6) 2

ข้อที่ 10

1) 54
2) 142
3) 345
4) 2
5) 6
6) 49
7) 1
8) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

ข้อที่ 11

1) ฟังก์ชันเพิ่ม
2) ฟังก์ชันเพิ่ม
3) ฟังก์ชันเพิ่ม
4) ฟังก์ชันลด

ข้อที่ 12

1) 3
2) -4
3) 10
4) 2, 1
5) -1, 1

ข้อที่ 13

1) $(-\infty,2)$
2) หาค่าไม่ได้
3) หาค่าไม่ได้
4) $\left(-\infty,-\sqrt{10}\right)\cup\left(\sqrt{10},\infty\right)$

ข้อที่ 14

1) 337,500

2) 759,375

แบบฝึกหัดบทที่ 3

ข้อที่ 1

1) $\log_3 81 = 4$

2) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = 2$

3) $\log_5 125 = 3$

4) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

5) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

ข้อที่ 2

1) $4^3 = 64$

2) $8^3 = 512$

3) $\sqrt{3}^4 = 9$

4) $5^1 = 5$

5) $10^{-4} = 0.0001$

ข้อที่ 3

1) 5

2) -3

3) -4

4) 3

5) $\frac{3}{2}$

ข้อที่ 4

1) 1,024

2) $5^{\frac{4}{5}}$

3) 724

4) $-\frac{8}{3}$

5) -1

ข้อที่ 5 0.7781

ข้อที่ 6

1) $3\log 2$

2) $-2\log 2$

3) 7

4) 432

5) 0

6) 108

ข้อที่ 7

1) -4.0477

2) -0.0477

3) 6.9523

4) 1.9523

5) -3.0477

ข้อที่ 8

1) 512

2) $\frac{12}{7}$

3) $-4,\ 3$

4) $-\frac{4,999}{2,998}$

5) 43,046,721

ข้อที่ 9

1) $m(t) = 100e^{-0.0231t}$

2) 32 กรัม

3) 45 ปี

ข้อที่ 10 17 ชั่วโมง

ข้อที่ 11   หาค่าไม่ได้

แบบฝึกหัดบทที่ 4

ข้อที่ 1

1) $\frac{BC}{AB}$

2) $\frac{AC}{AB}$

3) $\frac{BC}{AC}$

4) $\frac{AC}{AB}$

5) $\frac{BC}{AB}$

6) $\frac{AC}{BC}$

ข้อที่ 2 $\frac{7}{5}$

ข้อที่ 3 $-\frac{7}{13}$

ข้อที่ 4

1) $\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$

2) 0

3) $\frac{1}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\frac{1+4\sqrt{3}}{2}$

6) 4

7) $-\frac{9}{2}$

ข้อที่ 5 $a = 2$

ข้อที่ 6 $BC = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, $AC = \frac{27}{2}$, $B = 60^\circ$

ข้อที่ 7 150 เมตร

ข้อที่ 8 $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ ฟุต

ข้อที่ 9 0.19

ข้อที่ 10

1) ควอดรันต์ที่ 3
2) ควอดรันต์ที่ 3
3) ควอดรันต์ที่ 3
4) ควอดรันต์ที่ 2
5) ควอดรันต์ที่ 1
6) ควอดรันต์ที่ 2

ข้อที่ 11

1) 2
2) $\sqrt{3}$
3) 1
4) 0
5) 0

ข้อที่ 12 $\frac{12}{13}$

ข้อที่ 13

1) $\cos\theta$
2) $-\sin\theta$
3) $-\cot\theta$
4) $-\sec\theta$
5) $-\cos\theta$
6) $-\sin\theta$

7) $\cot\theta$

ข้อที่ 14

1) 240 องศา

2) 150 องศา

3) -405 องศา

4) -330 องศา

5) 12 องศา

ข้อที่ 15

1) $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน

2) $\frac{7\pi}{3}$ เรเดียน

3) $\frac{25\pi}{4}$ เรเดียน

4) $-\frac{11\pi}{6}$ เรเดียน

5) $-\frac{13\pi}{6}$ เรเดียน

ข้อที่ 16 60°

ข้อที่ 17 $\sqrt{xy}$

ข้อที่ 18 $\frac{15(3-\sqrt{3})}{2}$